第八模块　无穷级数

一. 解答题

1、 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2},\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛。(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；(II) 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛。

(2014 数一)

证明：(I) $\cos a_n-\cos b_n=a_n$，且$0<a_n<\frac{\pi}{2},0<b_n<\frac{\pi}{2}$，所以$0<a_n<b_n$，又因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(II) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{b_n}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n^2}\cdot\frac{a_n}{1-\cos b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}b_n^2}{b_n^2}\cdot\frac{a_n}{1-\cos b_n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n-\cos a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n-1}=\frac{1}{2},$$

因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由比较审敛法的极限形式，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛。

2、 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,(n+1)a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})a_n$，证明，当$|x|<1$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，并求其和函数。

(2020 数一)

解析：收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}|=1$，所以当$|x|<1$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛，令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$|x|<1$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+\frac{1}{2})a_n x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x),$$

解此可分离变量的微分方程，分离变量得，

$$\frac{dS(x)}{2+S(x)}=\frac{dx}{2(1-x)}\Rightarrow \ln|2+S(x)|=-\frac{1}{2}\ln|1-x|+\ln|C_1|,$$

整理得 $S(x)=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2\,(C=\pm C_1)$，又因为 $S(0)=0$，得 $C=2$，

所以 $S(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}-2$，$-1<x<1$.

3、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

（2012 数一）

解　记 $u_n(x)=\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$，则由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|x^{2(n+1)}\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\Big/ x^{2n}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\right|$$
$$=x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right|=x^2$$

当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时幂级数收敛；当 $x^2>1$，即 $|x|>1$ 时幂级数发散，故收敛半径

$R=1$，则收敛区间为 $(-1,1)$，又由于 $x=\pm1$ 时，一般项为无穷大量，幂级数发散，故收敛域为 $(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$$

记 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$，$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$

由幂级数和函数的性质可得

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})'=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},x\in(-1,1)$$

由于 $xS_2(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，故由幂级数和函数的性质可得

$$[xS_2(x)]' = (\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1})' = 2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}$$

所以 $xS_2(x) = \int_0^x [tS_2(t)]'dt = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}dt = \int_0^x (\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t})dt = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\Big|_0^x = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

故 $S_2(x) = \frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, x\in(-1,1)$ 且 $x \neq 0$

又 $S_1(0) = 1$， $S_2(0) = 2$

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1), 且 x \neq 0 \\ 3, \quad x = 0 \end{cases}$$

4、设数列 $\{a_n\}$ 满足条件： $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0(n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

（I）证明： $S''(x) - S(x) = 0$；

（II）求 $S(x)$ 的表达式.

（2013 数一）

解：（I）证 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$， $S'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$，

又 $\because a_{n-2} = n(n-1)a_n \quad (n \geq 2)$，

$\therefore S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$

$\therefore S''(x) - S(x) = 0$ 得证.

（II） $S''(x) - S(x) = 0$ 为二阶常系数齐次线性微分方程，其特征正方程为

$$\lambda^2 - 1 = 0，$$

从而 $\lambda = \pm 1$，于是 $S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x}$.

又 $S(0) = a_0 = 3$， $S'(0) = a_1 = 1$，

代入上式得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$，

解得$C_1=1,C_2=2$，

所以$S(x)=e^{-x}+2e^{x}$.

5、已知函数$f(x)$可导，且$f(0)=1$, $0<\dot{f}(x)<\frac{1}{2}$,设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\dots)$.

证明：1)级数$\sum_{i=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛；

2)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且 0<$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ <2.

（2016 数一）

解析：

1) 因为$x_{n+1}=f(x_n)$，所以

$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|$，其中$\xi$介于$x_n$与$x_{n-1}$之间.

又$0<\dot{f}(x)<\frac{1}{2}$，所以$|x_{n+1}-x_n|\le\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$.

由于级数$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛，所以级数$\sum_{i=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛.

2) 设$\sum_{i=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$的前$n$项和为$S_n$，则$S_n=x_{n+1}-x_1$.

由 1) 知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，即$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1$）存在，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，由$x_{n+1}=f(x_n)$及$f(x)$连续，得$c=f(c)$，

即c是$g(x)=x-f(x)$的零点.

因为$g(0)=-1$，$g(2)=2-f(2)=1-[f(2)-f(0)]=1-2f'(\eta)$，其中$\eta\in(0,2)$，

于是$0<c<2$，即$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

二、选择题

1、 设R为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，$r$是实数，则

(A) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$发散时，$|r|\ge R$ (B) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$收敛时，$|r\le R$

(C) 当$|r|\geq R$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散　(D) 当$|r|\leq R$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛

(2020 数一)

解析：由R为幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径，得

$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=R$，进而有$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}|=R\cdot R=R^2$，

对于幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$，由比值法得，

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{2n+2}x^{2n+2}}{a_{2n}x^{2n}}|=|x|^2\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}|\cdot|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}|=\frac{|x|^2}{R^2}<1\Rightarrow|x|<R,$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为R，收敛区间为$(-R,R)$，故选项(C), (D)不对，

而当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}x^{2n}$ 发散时，$|r|\geq R$，故选 A.

2、设数列$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为_________.

(A) $(-1,1]$　　(B) $[-1,1)$

(C) $[0,2)$　　(D) $(0,2]$

(2011 数一)

解析：已知幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域关于$x=1$对称(端点除外),据此可排除选项(A)、(B)；

将$x=0$代入得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$,因为$\{a_n\}$单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,由莱布尼茨审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

将 $x=2$ 代入得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,其前 n 项和数列为: $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 由条件知极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$

不存在,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

综上知: 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$.

3、设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列,则下列级数中收敛的是________.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$.

(2019 数一)

解析: 取 $u_n=\frac{-1}{\ln n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 发散, A 错误.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$ 收敛,则由莱布尼茨判别法, $\frac{1}{u_n}$ 应单调递减趋向于零.由 $\{u_n\}$ 是单调

增加的有界数列,则 $\frac{1}{u_n}$ 单调递减不趋于零,B 错误.

取 $u_n=\frac{-1}{n}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{u_n}{u_{n+1}})=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n})$ 发散,C 错误.

对于 D 选项: $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)=(u_2^2-u_1^2)+(u_3^2-u_2^2)+\cdots=\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}^2-u_1^2)$ 存在,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 收敛.故应选 D.

4、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$

的________.

(A) 收敛点，收敛点 (B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点 (D) 发散点，发散点

(2015 数一)

解析：此题重点为需要找到幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛区间.

由级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=2$处条件收敛.

令$x-1=t$，当$x=2$时，$t=1$，即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$在$t=1$处条件收敛，

因此$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$的收敛区间为$(-1,1)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛区间为(0,2)，

从而$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛区间也是(0,2)，

故$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$在$x=\sqrt{3}$处收敛，在$x=3$处发散.应选 B.

5、设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx (n=1,2,\ldots)$，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，

则 $S(-\frac{9}{4})=$（　　）.

（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$-\frac{1}{4}$　　（D）$-\frac{3}{4}$

（2013 数一）

解　观察到 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的正弦函数，对 f 进行奇延拓，其周期为 2.

故 $S(x)=f(x)$.

$S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{1}{4})=-S(\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$. 故应选 C.

6、$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$（　　）.

（A）$\sin 1+\cos 1$.　　（B）$2\sin 1+\cos 1$.

（C）$2\sin 1+2\cos 1$.　　（D）$2\sin 1+3\cos 1$.

（2018 数一）

解　原式$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}$，

易知$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\bullet x^n=\cos x$，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}=\sin x$.

则原式$=2\sin 1+\cos 1$. 故应选 B.

三、填空题

1、已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$________________.

(2017 数一)

解析： $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，两端比较得，

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}n! & n\text{为偶数}\\ 0 & n\text{为奇数}\end{cases}$$

所以， $f^{(3)}(0)=0$.

2、幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$在区间(-1,1)内的和函数$S(x)=$________________.

(2017 数一)

解析：令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$，两端取积分得，

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{x}{1+x},$$

两端求导得，

$S(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$， $x\in(-1,1)$.

3、幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$S(x)=$______.

(2019 数一)

解析： $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}.$

4、函数$f(x)=x^2 2^x$在$x=0$处的 n 阶导数$f^{(n)}(0)=$______.

(2015 数二)

解析：由莱布尼兹公式得$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)}$

$$=x^2\cdot(2^x)^{(n)}+n\cdot 2x\cdot(2^x)^{(n-1)}+\tfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(2^x)^{(n-2)}$$

$$=x^2\cdot 2^x(ln2)^n+2nx\cdot 2^x(ln2)^{n-1}+n(n-1)\cdot$$

$2^x(ln2)^{n-2}$

所以$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

故$a=\frac{1}{2}$.

5、设函数$f(x)=\tan^{-1}x-\frac{x}{1+ax^2}$,且$f'''(0)$=1,则$a$ =.

（2016 数一）

解析：$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ，则

$$\tan^{-1}x=\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx=\sum_0^{\infty}\int_0^x (-1)^n x^{2n}\,dx$$

$$=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1+ax^2}=x\cdot\frac{1}{1+(ax)^2}=x\cdot\sum_0^{\infty}(-ax^2)^n$$

$$=x\cdot(1-ax^2+a^2x^4-a^3x^6+\cdots)$$

$$=x-ax^3+a^2x^5-a^3x^7+\cdots,$$

所以$f(x)=\tan^{-1}x-\frac{x}{1+ax^2}$

$$=\left(-\frac{1}{3}+a\right)x^3+\left(\frac{1}{5}-a^2\right)x^5+\left(-\frac{1}{7}+a^3\right)x^7+\cdots,$$

又$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots$,

因此$\frac{1}{3!}f'''(0)=-\frac{1}{3}+a$，

又$f'''(0)=1$，