模块二：一元函数微分学（一）

一．　解答题

(1) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(2014 数一)

解析：对于方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$，两端同时对 x 求导，得

$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$，

令 $y'=0$，得 $y=-2x$，或 $y=0$(舍去)。

把 $y=-2x$ 代入方程得 $-6x^3+6=0$，解得 $x=1$，$y=f(1)=-2$，

针对 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$，两端同时对 x 求导，得

$(3y^2+2xy+x^2)y''+(6y+2x)y'^2+(4x+2y)y'+2y=0$，

求得 $y''(1)=f''(1)=\dfrac{4}{9}>0$，由第二充分条件，

$x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 的极小值点，且极小值 $f(1)=-2$.

(2) 已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

(2017 数一)

解析：针对方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$，两端同时对 x 求导得，

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$，令 $y'=0$，得 $x=-1,1$

把 $x=-1,1$ 分别代回原方程，得 $y(-1)=0, y(1)=1$，

对方程 $3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$，两端再次对 x 求导得，

$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$，所以，$y''(-1)=2>0$，函数 $y(x)$ 取极小值，

极小值为 $y(-1)=0$；$y''(1)=-1<0$,函数 $y(x)$ 取极大值，极大值为 $y(1)=1$.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间(0,1)内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间(0,1)内至少存在两个不同实根。

(2017 数一)

解析：(I) 由题意，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又因为 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，所以 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$，根据极限的保号性，存在 $a\in(0,1)$，使 $\dfrac{f(a)}{a}<0$，则 $f(a)<0$，因为 $f(x)$ 在 $[a,1]$ 上连续，且 $f(1)>0$，$f(a)<0$，由零点定理，至少存在一个 $\xi\in(a,1)\subset(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即 $f(x)=0$ 在区间(0,1)内至少存在一个实根 ξ；

(II) $f(x)$ 在 $[0,\xi]$ 上连续，在 $(0,\xi)$ 内可导，且 $f(0)=f(\xi)$，由罗尔定理，则至少存在一 $\xi_1\in(0,\xi)$，使 $f'(\xi_1)=0$，

令 $F(x)=f(x)f'(x)$，$F(x)$ 在 [0,1] 上连续，在 (0,1) 内可导，且 $F(0)=F(\xi_1)=F(\xi)=0$，由罗尔定理，则至少存在一个 $\xi_2\in(0,\xi_1)$，一个 $\xi_3\in(\xi_1,\xi)$，使 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$，即 ξ_2,ξ_3 是方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间(0,1)内两个不同的实根。

(4)设函数 $f(x)$ 在区间[0, 2]上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$，证明：(I) 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$. (II) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\leq M$，则 $M=0$.

(2020 数一)

解析：(I) 若 $M=0$，则 $f(x)\equiv 0$，结论成立。

若 $M>0$，设 $|f(x)|$ 在 $c\,(0<c<2)$ 处取得最大值，即 $|f(c)|=M$，若 $0<c<1$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,c)$，会使得

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{M}{c}$，从而 $|f'(\xi)|=\dfrac{M}{c}>M$；

若 $c=1$，$|f'(\xi)|=M$；若 $1<c<2$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi_2\in(c,2)$，会使得

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(c)}{2-c}=\dfrac{-f(c)}{2-c}$，从而 $|f'(\xi)|=\dfrac{M}{2-c}>M$，综上所述，当 $M\geq 0$ 时，存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $|f'(\xi)|\geq M$.

(II) 若 $M>0$，则 $c\neq 0,2$

有 $M=|f(c)|=|f(c)-f(0)|=|\int_0^c f'(x)dx|\le\int_0^c|f'(x)|dx<Mc$，

还有 $M=|f(c)|=|f(2)-f(c)|=|\int_c^2 f'(x)dx|\le\int_c^2|f'(x)|dx<M(2-c)$，

上述两式相加可得，$2M<Mc+M(2-c)=2M$，由此产生矛盾，故假设不成立，所以 $M=0$.

(5) 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(2020 数二)

解析：因为 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$，令 $u=xt$，则

$$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x f(u)\cdot\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$$，所以当 $x\ne0$ 时，

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$$，而当 $x=0$ 时，由导数定义，

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du-\int_0^1 f(0)dt}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}$$，综上所述，

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},当x=0\\ \frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2},x\ne0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}$$

$$=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0)$$，

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

(6)求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数,其中 k 为参数.

(2011 数一)

解析： 令 $f(x)=k\arctan x-x$,则

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

1) 当 $k\le 1$ 时, $f'(x)=\dfrac{-[(1-k)+x^2]}{1+x^2}\le 0$,因此, $f(x)$ 单调减少,

此时 $f(x)$ 只有一个零点,即 $f(0)=0,$ 即原方程 $k\arctan x-x=0$ 只有一个实数根 $x=0;$

2) 当 $k>1$ 时,由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\sqrt{k-1},\ x_2=\sqrt{k-1},$

当 $x\in(-\infty,-\sqrt{k-1})$ 时, $f'(x)<0$,因此, $f(x)$ 单调减少;

当 $x\in(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 时, $f'(x)>0$,因此, $f(x)$ 单调增加;

当 $x\in(\sqrt{k-1},+\infty)$ 时, $f'(x)<0$,因此, $f(x)$ 单调减少;

所以 $x_1=-\sqrt{k-1}$ 是极小值点, $x_2=\sqrt{k-1}$ 是极大值点;

由于 $f(0)=0,$ 则 $f(x)$ 的极大值 $f(\sqrt{k-1})>0$, $f(x)$ 的极小值 $f(-\sqrt{k-1})<0$.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\ f(0)=0,$

综上所述: $f(x)$ 在 $k>1$ 时有 3 个不同的零点且分别位于 $(-\infty,-\sqrt{k-1})$, $(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$, $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内.

(7)已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}$ ，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，试求 a 的取值范围.

(2011 数二)

解析：由题设条件知

$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}=0$,因此 $\alpha>0$ ，且有

$$0=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3-\alpha}}{1+x^2},\text{得 }3-\alpha<2\text{，即 }\alpha>1.$$

又因为$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=0$,

即$0=\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$.

于是$2>\alpha-1$,即$\alpha<3$.

综上得:若要题设条件成立,则参数α的取值范围是$1<\alpha<3$.

(8)设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$确定,求$y=y(x)$的极值和曲线$y=y(x)$的凹凸区间及拐点.

(2011 数二)

解析：由题设条件知$y'(t)=t^2-1, x'(t)=t^2+1$,则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\cdot\dfrac{1}{x'(t)}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}$，令$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=0$得$t=\pm 1$.

当$t=-1$时,$x=-1$,且$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=-1}=-\dfrac{1}{2}<0$,由此知$y=1$是函数的一个极大值;

当$t=1$时,$x=\dfrac{5}{3}$,且$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=\frac{5}{3}}=\dfrac{1}{2}>0$,由此知$y=-\dfrac{1}{3}$是函数的一个极小值;

令$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}=0$得$t=0$,

当$t<0$时,$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$,此时$x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$，曲线是凸的;

当$t>0$时,$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$,此时$x\in\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$，曲线是凹的;

由拐点定义知$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$是拐点.

(9)(I)证明：对任意的正整数n，都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$成立.

(II)设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n (n=1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2011 数二)

解析：(I)利用拉格朗日微分中值定理,令 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上满足格朗日微分中值定理的条件,于是有

$$f(\frac{1}{n})-f(0)=f'(\xi)\cdot\frac{1}{n}(0<\xi<\frac{1}{n}),\text{即}$$

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(1+\frac{1}{n})-\ln 1=\frac{1}{(1+\xi)n},$$

$$\because 0<\xi<\frac{1}{n},\therefore \frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{1+\xi}<1,$$

则 $\frac{1}{1+n}<\frac{1}{n(1+\xi)}<\frac{1}{n}$, 故有 $\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.

(II)由(I)的结论知 $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$,因此有 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$,

令 $n=1,2,3,\cdots,n$ 得 $\ln 2-\ln 1<1$,

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},$$

$$\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

$$\cdots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

将上述各不等式两端分别相加得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},$$

于是 $a_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0$,

即数列 $\{a_n\}$ 是有下界.

又因为 $a_n-a_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}>0$,

即数列 $\{a_n\}$ 是单调下降的.

综上知数列 $\{a_n\}$ 单调下降且有界.根据极限存在准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且有限，数列

$\{a_n\}$收敛.

(10)(1)设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=e^{\frac{-x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(I)求 $y(x)$；

(II)求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(2019 数一)

解析： (I)这是一阶线性微分方程,由公式法可得方程的通解为

$$y=e^{-\int xdx}(\int e^{\int xdx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+c)=(x+c)e^{\frac{-x^2}{2}},$$

因为 $y(0)=0$,可知 $c=0$,则 $y=xe^{\frac{-x^2}{2}}$.

(II) $y'=e^{-\frac{x^2}{2}}+(-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y''=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$,

令 $y''=0$ 得 $x=0, x=\pm\sqrt{3}$.

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	_	0	+	0	_	0	+
y	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	凹

则函数的凸区间为：$(-\infty,-\sqrt{3})$， $(0,\sqrt{3})$，

凹区间：$[-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},+\infty)$，

拐点：$(-\sqrt{3},-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$, $(0,0)$, $(\sqrt{3},\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$.

(11) 已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程$x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$,求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(2014 数二)

解析：由$x^2+y^2y'=1-y'$，得$y'=\frac{1-x^2}{1+y^2}$，令$y'=0$，得$x=\pm1$，

当$x<-1$时，$y'<0$；当$-1<x<1$时，$y'>0$；当$x>1$时，$y'<0$.

因此，$x=-1$为极小值点，$x=1$为极大值点.

由$x^2+y^2y'=1-y'$，分离变量得$(1+y^2)dy=(1-x^2)dx$

求得方程的通解为$y^3+3y+x^3-3x=C$.

代入$y(2)=0$，得$C=2$，因此有$y^3+3y+x^3-3x=2$.

所以，$y(x)$的极小值为$y(-1)=0$，$y(x)$的极大值为$y(1)=1$.

(12) (I)设函数$u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(II)设函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式.

(2015 数一)

解析：(I)因为函数$u(x),v(x)$可导，所以

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=u'(x),\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=v'(x)$，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$

由导数定义知$[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

(II) $f'(x)=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$.

(13)已知函数$f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$,求$f(x)$零点的个数.

(2015 数二)

解析：由题意知$f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=(2x-1)\sqrt{1+x^2}$，

令$f'(x)=0$，得驻点$x=\frac{1}{2}$.

当$x\in(-\infty,\frac{1}{2})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少，则$f(x)$在此区间最多有一个零点；

当$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加，则$f(x)$在此区间最多有一个零点；

在区间$(\frac{1}{2},+\infty)$内，有$f(1)=0$，因此$x=1$是此区间内的唯一零点.

在区间$(-\infty,\frac{1}{2})$内，由于$f(-1)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt+\int_{1}^{1}\sqrt{1+t}dt=2\int_{0}^{1}\sqrt{1+t^2}dt>0.$

且 $f(0)=\int_{0}^{1}\sqrt{1+t^2}dt+\int_{1}^{0}\sqrt{1+t}dt=\int_{0}^{1}(\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1+t})dt<0,$

因此在$(-1,0)$内有唯一的零点.

综上，函数$f(x)$共有 2 个零点.

(14) 已知函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上具有 2 阶导数，$f(a)=0, f'(x)>0, f''(x)>0$，设$b>a$，曲线$y=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线与 x 轴的交点是$(x_0,0)$，证明$a<x_0<b$.

(2015 数二)

解析：曲线$y=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线方程为$y-f(b)=f'(b)(x-b)$,

切线与 x 轴的交点的横坐标为$x_0=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$.

由于$f'(x)>0$，因此$f(x)$单调增加，则当$b>a$时有$f(b)>f(a)=0$.

又有$f'(b)>0$，因此$\frac{f(b)}{f'(b)}>0$，从而$x_0<b$.

要想证明$x_0>a$，等价于$b-\frac{f(b)}{f'(b)}>a$，因为$f'(b)>0$，因此等价于证明$f'(b)(b-a)>f(b)$.

事实上，因为$f(a)=0$，所以$f(b)=f(b)-f(a)$.

由拉格朗日中值定理知$f(b)=f'(\xi)(b-a), a<\xi<b$.

且由于$f''(x)>0$，则$f'(x)$单调增加，从而$f'(\xi)<f'(b)$，

因此有$f'(\xi)(b-a)<f'(b)(b-a)$，即$f(b)<f'(b)(b-a)$.原题得证.

(15) 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ xe^x+1, & x\le 0\end{cases}$,求$f'(x)$，并求$f(x)$的极值.

(2019 数二)

解：当$x>0$时，$f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$;

当$x<0$时，$f'(x)=e^x(x+1)$.

因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$,所以$f'(0)$不存在.

综上$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1), & x>0,\\ e^x(x+1), & x<0.\end{cases}$

令$f'(0)=0$，得驻点$x=-1, x=\frac{1}{e}$.

当$x<-1$或$0<x<\frac{1}{e}$时，$f'(x)<0$；

当$-1<x<0$或$x>\frac{1}{e}$时, $f'(x)>0$.

所以，$f(x)$在区间$\left(-\infty,\ -1\right)$和$\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$内单调减少，

在区间$\left(-1,\ 0\right)$和$\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$内单调增加，

从而$f(x)$的极小值为$f(-1)=1-\frac{1}{e}$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$,极大值为$f(0)=1$.

(16) 已知函数$f(x)$在[0,1]上具有二阶导数，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，

证明：(I)存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$;

(II) 存在$\eta\in(0,1)$, 使得$f''(\eta)<-2$.

(2019 数二)

解:

(I)**证法一**：由牛顿-莱布尼茨公式可得

$\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)$,

其中,$F(x)$为$f(x)$在[0,1]上的一个原函数，

对$F(1)-F(0)$运用拉格朗日中值定理可得：

$\exists\eta_1\epsilon(0,1)$,使得$F(1)-F(0)=F'(\eta_1)$，

即$\int_0^1 f(x)dx=f(\eta_1)$,故$f(\eta_1)=1$.

又由于$f(x)$在$[\eta_1,1]$上连续，在$(\eta_1,1)$上可导，且$f(\eta_1)=f(1)=1$,

由拉格朗日定理可得：$\exists\xi\epsilon(\eta_1,1)\subset(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

证法二：

证明$f(x)$在[0,1]上的最大值必然大于 1，否则，

若$\forall x\in[0,1]$，都有$f(x)\le 1$，则$\int_0^1 f(x)dx\le 1$,而由$f(0)=0$

可知，该等式不取等号，矛盾，

则必$\exists\eta_2\epsilon(0,1)$,使得 $f(\eta_2)=\max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}>1$,则由费马引理，

$\exists\xi\epsilon(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

(II)令$g(x)=f(x)+x^2, x\in[0,1]$.

则由题设可知，$g(0)=0$，$g(1)=2$，$\int_0^1 g(x)dx=\frac{4}{3}$.

反证法，假设对任意的$x\in(0,1)$, $f''(x)\geq -2$,

则$g''(x)\geq 0$,进一步可得$g(x)\leq 2x$,

从而$\int_0^1 g(x)dx\leq \int_0^1 2xdx=1$,矛盾，故假设不成立

所以$\exists\eta\epsilon(0,1)$,使得$f''(\eta)<-2$.

(17) 设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（II）存在$\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(2013 数二)

证明：（I）设$F(x)=f(x)-x, x\in[-1,1]$,

$\because f(x)$是奇函数,$\therefore f(0)=0$.

从而$F(1)=f(1)-1=0$, $F(0)=f(0)-0=0$，

且$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导.由罗尔中值定理，存在$\xi\in(0,1)$使得

$f'(\xi)=f(\xi)-1=0$.即 $f'(\xi)=1$.

（II）设 $G(x)=f'(x)+f(x)-x$, $-1\leq x\leq 1$.

$\because f(x)$在$[-1,1]$上是奇函数，
$\therefore f'(x)$在$[-1,1]$上是偶函数，

$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1)$,
$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(1)$.

故$G(1)=G(-1)$，且$G(x)$在$[-1,1]$内连续，在$(-1,1)$内可导.由罗尔中值定理，$\exists\eta\in(-1,1)$使得

$$G'(\eta)=f''(\eta)+f'(\eta)-1=0$$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

另解 1：设$G(x)=e^x\left(f'(x)-1\right)$,则由（1）：$G(\xi)=0$.

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f^{'}(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0$.

则 $\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使 $G^{'}(\eta)=0$.

即 $e^{\eta}\left[f^{'}(\eta)-1\right]+e^{\eta}f^{''}(\eta)=0$.

亦即 $f^{''}(\eta)+f^{'}(\eta)=1$.

另解 2：令 $G(x)=e^{x}\left(f^{'}(x)-1\right)$, 则 $G(\xi)=0$.

由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f^{'}(x)$ 为偶函数，得 $G(-\xi)=0$.

$G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]\subset[-1,1]$ 上可导，由罗尔定理知

$\exists\eta\in(-\xi,\xi)\in(-1,1)$, $G^{'}(\eta)=0$.

即 $f^{''}(\eta)+f^{'}(\eta)=1$.

(18) 设函数 $f(x)=\ln x=\frac{1}{x}$

（I）求 $f(x)$ 的最小值；

（II）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_n}<1$.证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(2013 数二)

解　（I） $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$,

对 x 求导 $f^{'}(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

令 $f^{'}(x)=0$ 即 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0,\ \frac{x-1}{x^2}=0, x=1$.

又 $f^{''}(1)>0$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的唯一极小值，故为 $f(x)$ 的最小值.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=\ln 1+\frac{1}{1}=1$.

（II）由于 $\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geq 1$，则 $\frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n}$,

又 $x_n>0$ 故 $x_{n+1}>x_n$，故 x_n 单调递增.

又由于$\ln x_n < \ln x_n + \dfrac{1}{x_n+1} < 1$，则$x_n < e$，故$x_n$有上界.则由单调有界收敛定理可知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x_n + \dfrac{1}{x_n}\right) = \ln a + \dfrac{1}{a}$，

由于$\ln x_n + \dfrac{1}{x_n+1} < 1$，则$\ln a + \dfrac{1}{a} \le 1$，又$\ln a + \dfrac{1}{a} \ge 1$，故$\ln a + \dfrac{1}{a} = 1$，

故$a = 1$.

(19) 设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且$f(1)=1$，证明：

（I）存在$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi)=1$；

（II）存在$\eta \in (-1,1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(2013 数一)

证明:（I）设$F(x)=f(x)-x, x\in[-1,1]$,

$\because f(x)$是奇函数,$\therefore f(0)=0.$

从而$F(1)=f(1)-1=0,\ F(0)=f(0)-0=0$，

且$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导.由罗尔中值定理，存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=f(\xi)-1=0.$即$f'(\xi)=1.$

（II）设　$G(x)=f'(x)+f(x)-x, \qquad -1\le x\le 1.$

$\because f(x)$在$[-1,1]$上是奇函数，
$\therefore f'(x)$在$[-1,1]$上是偶函数，

$G(1)=f'(1)+f(1)-1=f'(1),$
$G(-1)=f'(-1)+f(-1)+1=f'(1).$

故$G(1)=G(-1)$，且$G(x)$在$[-1,1]$内连续，在$(-1,1)$内可导.由罗尔中值定理，$\exists\eta\in(-1,1)$使得

$$G^{'}(\eta)=f^{''}(\eta)+f^{'}(\eta)-1=0$$

即 $f^{''}(\eta)+f^{'}(\eta)=1.$

另解 1：设 $G(x)=e^{x}\left(f^{'}(x)-1\right)$, 则由（1）：$G(\xi)=0.$

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f^{'}(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0.$

则 $\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$ 使 $G^{'}(\eta)=0.$

即 $e^{\eta}\left[f^{'}(\eta)-1\right]+e^{\eta}f^{''}(\eta)=0.$

亦即 $f^{''}(\eta)+f^{'}(\eta)=1.$

另解 2：令 $G(x)=e^{x}\left(f^{'}(x)-1\right)$, 则 $G(\xi)=0.$

由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f^{'}(x)$ 为偶函数，得 $G(-\xi)=0.$

$G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]\subset[-1,1]$ 上可导，由罗尔定理知

$\exists\eta\in(-\xi,\xi)\in(-1,1)$, $G^{'}(\eta)=0.$

即 $f^{''}(\eta)+f^{'}(\eta)=1.$

(20) （1）证明方程 $x^{n}+x^{n-1}+\cdots+x=1$(n 为大于 1 的整数)在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实根；

(2) 记（1）中的实根为 x^{n}，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{n}$ 存在，并求此极限。

(2012 数二)

解 （1）令 $f_{n}(x)=x^{n}+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f_{n}(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，且

$$f_{n}(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^{n}+(\frac{1}{2})^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n}})}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2^{n}}<0$$

$f_{n}(1)=n-1>0$，即 $f_{n}(\frac{1}{2})$ 与 $f_{n}(1)$ 异号，于是由连续函数的零点存在性定理知，$f_{n}(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内至少存在一个零点。又因为

$$f_{n}'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0, x\in(\frac{1}{2},1)$$

故知 $f_n(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 上单调增加，所以 $f_n(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内至多有一个零点。

综上得 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有唯一零点，也即方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实根；

（2）由（1）知 $f_n(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有唯一零点，记为 x_n，

则 $x_n\in(\frac{1}{2},1)$。记 $f_{n+1}(x)=x^{n+1}+x^n+\cdots+x-1=x^{n+1}+f_n(x)$

$$f_{n+1}(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^{n+1}+(\frac{1}{2})^n+\cdots+\frac{1}{2}-1=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n+1}})}{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2^{n+1}}<0$$

$f_{n+1}(x)=x^{n+1}+f_n(x)=x^{n+1}>0$（因为 x_n 是 $f_n(x)$ 的一个零点）

故 $f_{n+1}(x)$ 在 $(\frac{1}{2},x_n)$ 内必存在唯一零点 x_{n+1}

即 $\frac{1}{2}<x_{n+1}<x_n$，数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有界，故必存在极限。将 $\{x_n\}$ 的极限记为 a，$a\in[\frac{1}{2},1)$。又因为

$f_n(x_n)=x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$，也即 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1$

故有 $\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$。两端取极限有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=\frac{a-0}{1-a}=1$

解得 $a=\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$