第九模块　向量代数与空间解析几何

一. 解答题

1、过点(0,1)作曲线 L：$y=\ln x$的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成。求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

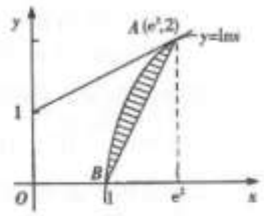
(2012 数二)

解析： 设切点为$(x_0,\ln x_0)$，又切线的斜率为$\dfrac{1}{x_0}$，故曲线 L 在点$(x_0,\ln x_0)$处的切线方程为 $y=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}\cdot x+\ln x_0-1$

又由于切线方程通过点(0,1)，故$1=\ln x_0-1$，得$x_0=e^2$

于是切线方程为$y=\dfrac{1}{e^2}x+1$，切点为$A(e^2,2)$

区域 D 如图所示，记S_D为区域 D 的面积



$$
\begin{aligned}
S_D&=\int_1^{e^2}\ln x dx-\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2\\
&=x\ln x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\cdot\frac{1}{x}dx-(e^2-1)\\
&=2e^2-(e^2-1)-(e^2-1)=2
\end{aligned}
$$

记 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为V_D

$$V_D=\pi\int_1^{e^2}\ln^2 xdx-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot(e^2-1)$$
$$=\pi x\ln^2 x\Big|_1^{e^2}-\pi\int_1^{e^2}xd\ln^2 x-\frac{4}{3}\pi(e^2-1)$$
$$=4\pi e^2-2\pi x\ln x\Big|_1^{e^2}+2\pi(e^2-1)-\frac{4}{3}\pi(e^2-1)$$
$$=\frac{2}{3}\pi(e^2-1)$$

2、设函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微，$f(0,0)=0,\ \vec{n}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1)|_{(0,0)}$，非零向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，则

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在　(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

(2020 数一)

解析：因为 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微，则有

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$
$$=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\vec{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xf_x(0,0)+yf_y(0,0)-f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{0(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$，故选 A.

3、已知平面 $x+ky-2z=9$ 于平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，试求 k 。

解析：　两平面的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，由两平面的夹角公式可解。

两平面的法向量可分别取 $\vec{n_1}=(1,k,-2),\quad \vec{n_2}=(2,-3,1)$，则

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}_1\bullet\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|1\times 2+k\times(-3)+(-2)\times 1|}{\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{3|k|}{\sqrt{5+k^2}\sqrt{14}}=\frac{\pm 3k}{\sqrt{5+k^2}\sqrt{14}}$$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可解得 $k=\pm\frac{\sqrt{70}}{2}$

4、 已知两直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}, L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，求过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程。

解析： 关键是求出平面的法向量，有两种方法：（1）用向量积造与两直线的方向向量都垂直的向量；（2）先设出平面方程，再由条件定系数。

法一 直线 L_1 上的点 $(1,2,3)$ 在所求平面上；又所求平面的法线向量 $\vec{n}$ 与已知二直线 L_1, L_2 的方向向量 $\vec{s_1}=(1,0,-1)$、$\vec{s_2}=(2,1,1)$ 都垂直，从而可取

$$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

于是所求平面方程为

$$1\cdot(x-1)-3(y-2)+1\cdot(z-3)=0$$

即

$$x-3y+z+2=0$$

法二 设过直线 L_1 上的点 $(1,2,3)$ 的平面方程为

$$A(x-1)+b(y-2)+C(z-3)=0,$$

其法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$ 与已知二直线 L_1, L_2 的方向向量 $\vec{s_1}=(1,0,-1)$、$\vec{s_2}=(2,1,1)$ 都垂直，则有

$\begin{cases}\vec{s_1}\cdot\vec{n}=A-C=0\\ \vec{s_2}\cdot\vec{n}=2A+B+C=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}C=A\\ B=-3A\end{cases}$，取 $A=1$ 则 $\vec{n}=(1,-3,1)$。平面方程为：

$$x-1-3(y-2)+z-3=0$$

即

$$x-3y+z+2=0$$

5、 求过点 $(-1,2,3)$，垂直于直线 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程。

解析： 由本题的条件知：所求直线的方向向量 $\vec{s}$ 垂直于已知直线的方向向量 $\vec{s_1}$，也垂直于已知平面的法向量 $\vec{n}$，可用向量积求 $\vec{s}$。

所求直线的方向向量$\vec{s}$垂直于已知直线的方向向量$\vec{s_1}$，也垂直于已知平面的法向量$\vec{n}$，故可取

$$\vec{s}=\vec{s_1}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=-3\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$$

从而所求直线的方程为 $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-3}{-3}$

即 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

6、求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=14$上的投影的直线方程。

解析： 应考虑过已知直线的平面束中有一个平面与已知平面垂直，平面束中该平面是直线的投影柱面。

过已知直线的平面束方程为$3x-y-2z-9+\lambda(2x-4y+z)=0$，即

$$(3+2\lambda)x+(-1-4\lambda)y+(\lambda-2)z-9=0,$$

其法向量 $\vec{n}=(3+2\lambda,-1-4\lambda,\lambda-2)$；平面束中有一个平面与已知平面垂直，即其法向量 $\vec{n}=(3+2\lambda,-1-4\lambda,\lambda-2)$与已知平面的法向量 $\vec{n_1}=(4,-1,1)$垂直，则两者的数量积为零： $\vec{n}\cdot\vec{n_1}=$ $(3+2\lambda,-1-4\lambda,\lambda-2)\cdot$ $(4,-1,1)$ $=12+8\lambda+1+4\lambda+\lambda-2=0$，

可得$\lambda=-\dfrac{11}{13}$，则法向量 $\vec{n}=(\dfrac{17}{13},\dfrac{31}{13},-\dfrac{37}{13})=\dfrac{1}{13}(17,31,-37)$。于是平面束中以此为法向量的平面方程为 $17x+31y-37z-117=0$，即是直线的投影柱面。

投影柱面与已知平面的交线$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z=14\end{cases}$即是已知直线在已知平面上的投影。

7、 一平面通过两平面 $x+5y+z=0$， $x-z+4=0$的交线，且与平面 $x-4y-8z+12=0$成45°角，求其方程。

解 析： 过交线的平面束中有两个平面与已知平面成45°，用数量积表示$\cos 45^\circ$。

先求过交线的平面束方程为 $\lambda(x+5y+z)+x-z+4=0$，即

$(\lambda+1)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0$，其法向量为 $\vec{n}=(\lambda+1,5\lambda,\lambda-1)$，

当 $\vec{n}=(\lambda+1,5\lambda,\lambda-1)$ 与已知平面法向量 $\vec{n}_1=(1,-4,-8)$ 成 45° 时，平面束中相应平面与已知平面成 45°。

$$\cos 45^\circ=\cos(\vec{n},\hat{\ }\vec{n}_1)=\frac{(\lambda+1)\times 1+5\lambda(-4)+(\lambda-1)(-8)}{\sqrt{(\lambda+1)^2+(5\lambda)^2+(\lambda-1)^2}\sqrt{1+(-4)^2+(-8)^2}}$$

即 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-27\lambda+9}{\sqrt{27\lambda^2+2}\times 9}=\frac{1-3\lambda}{\sqrt{27\lambda^2+2}}$，$1-3\lambda=\sqrt{\frac{27}{2}\lambda^2+1}$，$9\lambda^2+12\lambda=0$，可得

$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-\frac{4}{3}$， 于是所求平面有两个：

（1）$\lambda_1=0$ 时，有 $x-z+4=0$，即已知平面；

（2）$\lambda_2=-\frac{4}{3}$ 时，有 $x+20y+7x-12=0$。

8、 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$ 在 xoy 坐标平面上的投影。

解析 本高度有限的旋转抛物面的上沿（即旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 的交线）在 xoy 坐标平面上的投影是旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$ 在 xoy 坐标平面上的投影的边界线。

旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 的交线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=4 \end{cases}$，消 z 得交线在 xoy 坐标平面上的投影柱面方程： $x^2+y^2=4$ 。投影柱面 $x^2+y^2=4$ 与坐标平面 $z=0$ 的交线

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$ 在 xoy 坐标平面上的投影的边界线。则

旋转抛物面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 4)$ 在 xoy 坐标平面上的投影为： $x^2+y^2\le 4$