模块三：一元函数积分学（二）

(21) 已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（1）求 $f(x)$

（2）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1，求 a 的值。

(2018 数二)

解（1）令 $u=x-t$，则

$$\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

由题意知

$$\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$$

对上式两端求导得

$$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$$

所以 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，且

$$f'(x)+f(x)=2a$$

$$f(x)=e^{-x}(C+\int 2ae^x dx)=Ce^{-x}+2a$$

由 $f(0)=0$，得 $C=-2a$，从而

$$f(x)=2a(1-e^{-x})$$

（2）$\int_0^1 2a(1-e^{-x})du=\frac{2a}{e}$，由题设得 $\frac{2a}{e}=1$，$a=\frac{e}{2}$

一.　　选择题

(1)　若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$_______A_______.

(A) $2\sin x$　　(B) $2\cos x$　　(C) $2\pi\sin x$　　(D) $2\pi\cos x$

(2014 数一)

解析：

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}[x^2-2x(a\cos+b\sin x)+(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x+2ab\cos x\sin x)]dx$$

$$=2\int_0^{\pi}(x^2-2bx\sin x+a^2\frac{1+\cos 2x}{2}+b^2\frac{1-\cos 2x}{2})dx$$

$=\frac{2}{3}x^3|_0^\pi+4b\int_0^\pi xd(\cos x)+a_1^2(x+\frac{1}{2}\sin 2x)|_0^\pi+b_1^2(x-\frac{1}{2}\sin 2x)|_0^\pi$

$=\frac{2}{3}\pi^3+\pi(a_1^2+b_1^2-4b_1)$

所以，相当于求 $a_1^2+b_1^2-4b_1$ 的极小值，显然，当 $a_1=0,b_1=2$ 时积分最小，即 $a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$，故选 A.

(2) 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处。图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3。计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0 (单位：s)，则

(A) $t_0=10$　　(B) $15<t_0<20$　　(C) $t_0=25$　　(D) $t_0>25$

(2017 数一)

解析：令 $s_1(t),s_2(t)$ 表示甲、乙两人的路程，由题意，计时开始时，甲在乙前方 10m，要想在 t_0 时刻追上乙，应有 $s_1(t_0)-s_2(t_0)=-10$，根据题干图中阴影部分面积数值为 10,20,3,可得

$t=10$ 时，$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]dt=10$

$15<t<20$ 时，

$s_1(t)-s_2(t)=10+\int_{10}^{t}[v_1(t)-v_2(t)]dt>10+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]dt=10-20=-10$

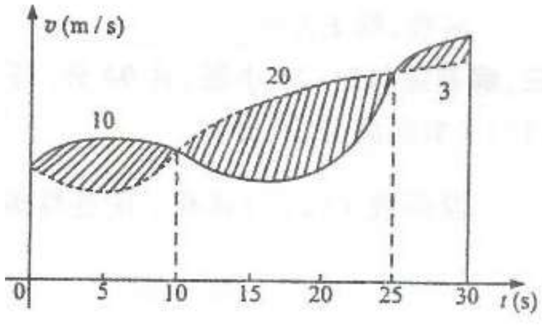
$t=25$ 时，

$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]dt=\int_0^{10}[v_1(t)-v_2(t)]dt+\int_{10}^{25}[v_1(t)-v_2(t)]dt=10-20=-10$

$t>25$ 时，

$s_1(t)-s_2(t)=\int_0^{t}[v_1(t)-v_2(t)]dt=\int_0^{25}[v_1(t)-v_2(t)]dt+\int_{25}^{t}[v_1(t)-v_2(t)]dt$

$=-10+\int_{25}^{t}[v_1(t)-v_2(t)]dt>-10$，故选 C.



(3) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则

(A) $\int_{-1}^{1} f(x)dx>0$ (B) $\int_{-1}^{1} f(x)dx<0$ (C) $\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx$ (D) $\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx$

(2017 数二)

解析：$f''(x)>0$，所以 $f(x)$ 的图形为凹的，又因为 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，$f(x)$ 为偶函数，C、D 都不对，不妨设 $f(x)=2x^2-1$，则 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=-\frac{2}{3}<0$，A 不对，B 对，故选 B.

(4) $\int_{0}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$

(A) $\frac{\pi^2}{4}$ B) $\frac{\pi^2}{8}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

(2020 数二)

解析：令 $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$，

则原式=$\int_{0}^{1}\frac{\arcsin t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}}\cdot 2tdt=2\int_{0}^{1}\frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=2\int_{0}^{1}\arcsin t(d\arcsin t)=(\arcsin t)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}$，

故选 A.

(5)设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin\ x)dx,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot\ x)dx,\ K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\ x)dx,$

则 I,J,K 的大小关系是_________.

(A) $I<J<K$ (B) $I<K<J$

(C) $J<I<K$ (D) $K<J<I$

(2011 数一)

解析： 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x<\cos x<1<\cot x,$

于是 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x,$ 由定积分的性质得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin\ x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x)dx,$$

即 $I < K < J$，故应选 B.

(6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin\ x)dx$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot\ x)dx$，$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\ x)dx$，则 I, J, K 的大小关系是_______.

(A) $I < J < K$　　(B) $I < K < J$

(C) $J < I < K$　　(D) $K < J < I$

(2011 数二)

解析： 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时，$\sin x < \cos x < 1 < \cot x$，

于是 $\ln\sin x < \ln\cos x < \ln\cot x$，由定积分的性质得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin\ x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\ x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot\ x)dx,$$

即 $I < K < J$，故应选 B.

(7)下列反常积分中收敛的是_______.

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　(B) $\int_2^{+\infty} \frac{lnx}{x}dx$　　(C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{xlnx}dx$　　(D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$

(2015 数二)

解析：选项 A：$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty} = +\infty$

选项 B：$\int_2^{+\infty} \frac{lnx}{x}dx = \frac{1}{2}(lnx)^2\Big|_2^{+\infty} = +\infty$

选项 C：$\int_2^{+\infty} \frac{1}{xlnx}dx = \ln|lnx|\Big|_2^{+\infty} = +\infty$

选项 D：$\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx = \int_2^{+\infty} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_2^{+\infty} = 3e^{-2}$. 应选 D.

(8) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x < \pi, \\ 2, & \pi \le x \le 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则（　　）.

（A） $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点　　（B） $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C） $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导　　（D） $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

(2013 数二)

解　由 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$

知 $F(\pi)=\int_0^{\pi}\sin t dt=-\cos t\big|_0^{\pi}=2$.

$\lim\limits_{x\to\pi^-}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to\pi^-}\int_0^x \sin t dt=\lim\limits_{x\to\pi^-}(1-\cos x)=2$.

$\lim\limits_{x\to\pi^+}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}(\int_0^{\pi}\sin t dt+\int_{\pi}^x 2dt)=\lim\limits_{x\to\pi^+}[2+2(x-\pi)]=2$.

故有 $\lim\limits_{x\to\pi}F(x)=2=F(\pi)$. 于是 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续.

$$F'_+(\pi)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\int_0^x f(t)dt-2}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\int_0^{\pi}\sin tdt+\int_{\pi}^x 2dt-2}{x-\pi}=2,$$

$$F'_-(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\int_0^x \sin tdt-2}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{-\cos x-1}{x-\pi}=0,$$

$F'_+(\pi)\ne F'_-(\pi)$，故 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导. 应选 C.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e,\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e.\end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则（　　）.

（A）$\alpha<-2$　　　　（B）$\alpha>2$

（C）$-2<\alpha<0$　　　　（D）$0<\alpha<2$

(2013 数二)

解　要使 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$ 收敛，

需 $\int_1^e\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$ 与 $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$ 都收敛.

而对 $\int_1^e\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx=\int_0^{e-1}\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}dt$ 是瑕积分，当 $\alpha-1<1$ 即 $\alpha<2$ 时收敛.

$$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=\int_e^{+\infty}(\ln x)^{-(\alpha+1)}d\ln x=-\frac{1}{\alpha(\ln x)^{\alpha}}\bigg|_e^{+\infty},$$

要使其收敛，则 $\alpha>0$，所以 $0<\alpha<2$. 故应选 D.

(10)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$， $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则(　　).

（A） $M>N>K.$　　　　（B） $M>K>N.$

（C） $K>M>N.$　　　　（D） $K>N>M.$

(2018 数一)

解　利用对称性可计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\pi$.

易得 $K>\pi,\ N<\pi$. 所以 $K>M>N.$ 故应选 C.

(11)设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin xdx(k=1,2,3)$，则有 ___________

（A） $I_1<I_2<I_3$（B） $I_3<I_2<I_1$（C） $I_2<I_3<I_1$（D） $I_2<I_1<I_3$

(2012 数一、二)

解　D

$$I_2=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx$$

又 $\pi<x<2\pi$ 时 $e^{x^2}\sin x<0$ 故 $\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx<0$，故 $I_2<I_1$

$$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_0^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=I_2+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$$

又 $2\pi<x<3\pi$ 时 $e^{x^2}\sin x>0$ 故 $\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx>0$，故 $I_2<I_3$

$$I_3=\int_0^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=I_1+\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$$

$$\int_{\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$$
$$=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)d(t+\pi)$$
$$=\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}e^{(x+\pi)^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}[e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}]\sin xdx>0$$

故 $I_1<I_3$

综上 $I_2<I_1<I_3$，故应选 D

(12)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，则

（A）当 $f'(x)<0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$　　　（B）当 $f''(x)<0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$

（C）当 $f'(x)>0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$　　　（D）当 $f''(x)>0$ 时， $f(\frac{1}{2})<0$

(2018 数二)

解　D

当 $f(x)=x-\frac{1}{2}$，满足 $\int_0^1 f(x)dx=0$，而 $f(\frac{1}{2})=0$，排除 A,C.

当 $f(x)=\sqrt{x}-\frac{2}{3}$，满足 $\int_0^1 f(x)dx=0$，而 $f''(x)<0$，而 $f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}>0$，排除 B

故应选 D.

(13)设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$， $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$， $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则

（A） $M>N>K.$　　（B） $M>K>N.$

（C） $K>M>N.$　　（D） $K>N>M.$

(2018 数二)

解 C

利用对称性可计算 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\pi$.

易得 $K>\pi,\ N<\pi$. 所以 $K>M>N.$ 故应选 C.

(14) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则_________

(A)a<1 且 b>1　　(B)a>1 且 b>1

(C)a<1 且 $a+b>1$　　(D)a>1 且 $a+b>1$

(2016 数一)

解析：C

取 a=0,若 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^b}=\frac{1}{1-b}(1+x)^{1-b}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{1-b}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x)^{b-1}}\right]$ 收敛，只需 b>即可，说明 a<1 可以使原反常积分收敛，排除 B,D。再取 a=-1,b=2. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}dx=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=+\infty$,发散，说明满足 a<1 且 b>1,原反常积分发散，排除 A。

(15)已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),\ x<1\\ lnx, x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 _______.

（A） $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x<1\\ x(lnx-1), x\geq 1\end{cases}$　　（B） $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,\ x<1\\ x(lnx+1)-1, x\geq 1\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1\end{cases}$

(2016 数一、二)

答案：D

解析：当$x<1$时，$F(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C_1$，

当$x\ge 1$时，$F(x)=\int \ln x dx=x\ln x-x+C_2$；

且 $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2x+C_1)=C_1-1$ ； $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x\ln x-x+C_2)=C_2-1$，

又$F(x)$在$x=1$处连续，因此有$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=F(1)$，即$C_1-1=C_2-1$，

所以$C_1=C_2=C$.故原函数为$F(x)=\begin{cases}x^2-2x+C, & x<1,\\ x\ln x-x+C, & x\ge 1.\end{cases}$

当$C=1$时，对应的原函数为 D.

(16) 反常积分①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$的敛散性为 _______.

（A）①收敛，②收敛　　（B）①收敛，②发散

（C）①发散，②收敛　　（D）①发散，②发散

(2016 数二)

答案：B

解析：因为$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=-\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to -\infty}e^{\frac{1}{x}}=0+1=1$，

所以$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$收敛.

而$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，

所以积分$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$发散，故应该选 B.

(17)下列反常积分发散的是______.

(A) $\int_0^{+\infty}xe^{-x}\,dx.$　　(B) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,dx.$

(C) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx.$　　(D) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx.$

(2019 数二)

解：D

对于 A 选项，$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = -\int_0^{+\infty} x\,de^{-x} = -\left[xe^{-x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx\right] = 1$收敛;

对于 B 选项，$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$收敛;

对于 C 选项，$\int_0^{+\infty} \frac{arctanx}{1+x^2}dx =$
$\int_0^{+\infty} arctanx\,d(arctanx) = \frac{1}{2}(arctanx)^2|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$收敛;

对于 D 选项，$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}ln(x^2+1)\,|_0^{+\infty} = +\infty$发散，故应选 D.

二. 填空题

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx =$________________.

(2017 数二)

解析：令$t = x+1, dx = dt$，则

$$原式=\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2}dt = -\int_1^{+\infty}\ln t d(\frac{1}{t}) = -(\frac{\ln t}{t}|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}dt)$$
$$= -(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} - 0 + \frac{1}{t}|_1^{+\infty}) = -(\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t} - 1) = 1$$

(2) 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0(a>0)$，且 $f(0) = m, f'(0) = n$，则

$\int_0^{+\infty} f(x)dx =$________________.

(2020 数一)

解析：微分方程对应的特征方程为$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$，

(1) 若$\Delta = a^2 - 4 > 0$，即$a > 2$时，则$\lambda_1 + \lambda_2 = -a, \lambda_1\cdot\lambda_2 = 1$，所以$\lambda_1, \lambda_2$均小于 0，方程通解为$f(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$，所以$f'(x) = C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$，

有$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$，

(2) 若$\Delta = a^2 - 4 = 0$，即$a = 2$时，则$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$，方程通解为$f(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda_1 x}$，

$f'(x) = (C_1\lambda_1 + C_2)e^{\lambda_1 x} + C_2\lambda_2e^{\lambda_2 x}$，同样有$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$，

(3) 若$\Delta = a^2 - 4 < 0$，即$0 < a < 2$时，则$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} i$，

方程通解为$f(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x)$，

$$f'(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(\frac{C_2\sqrt{4-a^2} - aC_1}{2}\cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x - \frac{C_1\sqrt{4-a^2} + aC_2}{2}\sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}x)，$$

有$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$，

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} -(f''(x) + af'(x))dx = -(f'(x) + af(x))|_0^{+\infty}$$

$$= -(\lim_{x\to+\infty} f'(x) + a\lim_{x\to+\infty} f(x)) + (f'(0) + af(0)) = n + am$$，故应填$a + nm$.

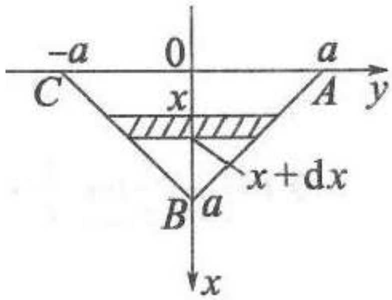
(3) 斜边长为$2a$等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为g，水密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为______________.

(2020 数二)

解析:如图建立坐标系,则直线AB的方程为$y = a - x, x \in [0,a]$,$\forall [x, x+dx] \subset [0,a]$

平板一侧所受的水压力元素为dF，且$dF = \rho g x \cdot 2(a-x)dx$，所以

$$F = \int_0^a 2\rho g x(a-x)dx = 2\rho g\int_0^a (ax - x^2)dx = 2\rho g(\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)|_0^a = \frac{1}{3}\rho g a^3$$



(4) 设 $y = y(x)$ 满足 $y'' + 2y' + y = 0$，且 $y(0) = 0, y'(0) = 1$，则

$\int_0^{+\infty} y(x)dx =$______________.

(2020 数二)

解析：$y'' + 2y' + y = 0$对应的特征方程为$r^2 + 2r + 1 = 0$，解得$r_1 = r_2 = -1$，所以通解为$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$，$y' = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-x}$，把$y(0) = 0, y'(0) = 1$分别代入得，

$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 1, C_1 = 0$，所以 $y = xe^{-x}$，

则 $\int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} xd(e^{-x}) = -(xe^{-x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx)$

$$= -(\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - 0 + e^{-x}|_0^{+\infty}) = -(\lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 1) = 1$$

(5)曲线 $y = \int_0^x \tan tdt (0 \le x \le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s =$_______.

(2011 数二)

解析：因为 $y'(x) = \tan x$.

所以 $s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx$

$\ln|\sec x + \tan x||_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2})$.

(6) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$ $\lambda > 0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =$_______.

(2011 数二)

解析： 由题设条件知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} xd(e^{-\lambda x})$$

$$= -(xe^{-\lambda x})_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

(7) 一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$______.

(2014 数二)

解析：由质心坐标公式得 $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx} = \frac{\int_0^1 (-x^3 + 2x^2 + x)dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1)dx} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}$.

(8) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{sinx}{1+cosx} + |x|)dx =$______.

(2015 数一)

解析：由于积分区间为对称区间，因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{sinx}{1+cosx}+|x|)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{1+cosx}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|dx=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\frac{\pi^2}{4}.$$

(9) 设 函 数 $f(x)$ 连 续 ， $\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$. 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$ ， 则 $f(1)=$______.

(2015 数二)

解析：由题意知$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^2f(x^2)$.

由$\varphi(1)=1$，得$\int_0^1 f(t)dt=1$，

由$\varphi'(1)=5$，得$\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=1+2f(1)=5$，

从而有$f(1)=2$.

(10)设封闭曲线L的极坐标方程为$r=\cos3\theta\,(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则$L$所围平面图形的面积是__________.

(2013 数二)

解： 设L所围图形面积为S，则$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{\pi}{12}$.

(11)$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$__________________.

(2013 数一)

解： $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x}=0+\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$

(12)设函数$f(x)$具有 2 阶连续导数，若曲线$y=f(x)$过点$(0,0)$且与曲线$y=2^x$在点$(1,2)$处相切，则$\int_0^1 xf''(x)dx=$__________________.

(2018 数一)

解 $y=f(x)$过点$(0,0)$，即$f(x)=0$， $y=f(x)$与$y=2^x$在点$(1,2)$相切$\Rightarrow f(1)=2$且$f'(1)=2\ln2$.

$\int_0^1 xf''(x)dx=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)dx=f'(1)-(f(1)-f(0))=2\ln2-2=2(\ln2-1)$.

故应填$2(\ln2-1)$.

(13) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=$ ______________

(2012 数一)

解 $\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx \overset{t=x-1}{=} \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}dt$$

$$=\underbrace{\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}dt}_{\text{奇函数}}+\underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt}_{\text{半圆的面积}}=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

(14) $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$ ____________

(2018 数二)

解 $\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})$

则原式=

$$\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}[\ln(x-3)-\ln(x-1)]_5^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}[\ln(x-3)-\ln(x-1)]-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 4)$$

$$=\frac{\ln 2}{2}$$

(15)曲线$y=\ln\cos x\ (0\le x\le\frac{\pi}{6})$的弧长为______.

(2019 数二)

解：$\frac{1}{2}ln3$

由弧微分公式，弧长

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+tan^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{cosx}dx=ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}ln3.$

故应填$\frac{1}{2}ln3$

(16)已知函数$f(x)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$,则$\int_0^1 f(x)\,dx=$______.

(2019 数二)

解：$\frac{\cos 1-1}{4}$

设$\mathrm{F}(x)=\int_1^x \frac{\sin t^2}{t} dt$,则

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xF(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 F(x)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2F(x)\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dF(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2F'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\sin x^2}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2\,dx=\frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1).$$

故应填$\frac{1}{4}(\cos 1-1)$.