第五模块　多元函数微分学（一）

一、 解答题：

1、设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数， $y=f(e^x,\cos x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.

(2017 数一)

解析：令 $u=e^x, v=\cos x$ ， $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot e^x+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot(-\sin x)$ ，

当 $x=0$ 时， $u=1, v=1$ ，所以 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}\cdot e^0+\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}\cdot(-\sin 0)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}$ ，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=[\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u^2}e^x+\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v}(-\sin x)]e^x+\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}e^x$$
$$+[\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v\partial u}e^x+\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial v^2}(-\sin x)](-\sin x)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(-\cos x)$$

所以， $\frac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}=\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial u^2}+\frac{\partial f(1,1)}{\partial u}-\frac{\partial f(1,1)}{\partial v}$.

2、求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值。

(2020 数一)

解析：令 $\begin{cases} f_x=3x^2-y=0 \\ f_y=24y^2-x=0 \end{cases}$ 解得驻点为(0,0), $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$,

$A=f_{xx}=6x, B=f_{xy}=-1, C=f_{yy}=48y$ ，在(0,0)处， $AC-B^2=-1<0$ ，未取极值，在（ $\frac{1}{6},\frac{1}{12}$ ）处， $AC-B^2=3>0, A=1>0$ ，所以函数有极小值， $f_{极小}=f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$.

3、 设函数 $z=f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导,

且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(2011 数一数二)

解析：由题设条件得 $g'(1)=0, g(1)=1$.则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f_1'+yg'(x)\cdot f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+xy\cdot f_{11}''+yf_{12}''[g(x)+xg'(x)]+g'(x)\cdot f_2'+y\cdot g(x)\cdot g'(x)\cdot f_{22}'',$$

将 $x=1, y=1, g'(1)=0, g(1)=1,$ 代入上式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

4、设 a,b 为实数,函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中,沿方向 $l=-3i-4j$ 的方向导数最大,最大值为 10.

(I)求 a,b;

(II)求曲面 $z=2+ax^2+by^2(z\geq 0)$ 的面积.

(2019 数一)

解析: (I) $\frac{\partial z}{\partial x}=2ax$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2by$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(3,4)}=6a$, $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(3,4)}=8b$.

由于方向导数最大方向是梯度方向,从而 $\frac{6a}{-3}=\frac{8b}{-4}$,所以 $a=b$ 且 $a<0,b<0$.

又由于 $6a(-\frac{3}{5})+8b(-\frac{4}{5})=10$,所以有 $a=b=-1$.

(II)要计算曲面 $z=2-x^2-y^2(z\geq 0)$ (设为 Σ)的面积,只需要对函数 l 在曲面上求第一型曲面积分.

即 $S=\iint\limits_{\Sigma}dS=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy,$

其中 D 为 Σ 在 xoy 平面上的投影, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 2\}$.

用极坐标计算该积分可得 $S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{1+4r^2}dr=\frac{13}{3}\pi.$

5、已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$,求 a, b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下,上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

(2019 数二)

解析: $\frac{\partial u}{\partial x}=(\frac{\partial v}{\partial x}+av)e^{ax+by}, \frac{\partial u}{\partial y}=(\frac{\partial v}{\partial y}+bv)e^{ax+by},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{ax+by}+a\left(\frac{\partial v}{\partial x}+av\right)e^{ax+by}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2a\frac{\partial v}{\partial x}+a^2 v\right)e^{ax+by}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+b\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{ax+by}+\mathrm{b}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+bv\right)e^{ax+by}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2b\frac{\partial v}{\partial y}+b^2 v\right)e^{ax+by}$$

则

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$=[2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2a\frac{\partial v}{\partial x}+a^2 v\right)-2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2b\frac{\partial v}{\partial y}+b^2 v\right)$$

$$+3\left(\frac{\partial v}{\partial x}+av\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+bv\right)]e^{ax+by}$$

$$=[2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(4a+3)\frac{\partial v}{\partial x}-(4b-3)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$+(2a^2+3a)v-(2b^2-3b)v]e^{ax+by}$$

$$=0.$$

要使方程中不含有$v(x,y)$的一阶偏导数，则有$\begin{cases}4a+3=0\\4b-3=0\end{cases}$,

解得$a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$.

6、 已知函数$f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求$f(x,y)$在曲线 C 上的最大方向导数.

(2015 数一)

解析：因为函数在每一点沿梯度方向的方向导数最大，且最大方向导数为该点梯度向量的模.

$f(x,y)=x+y+xy$在点(x,y)处的梯度为$\mathbf{grad}f(x,y)=(1+y,1+x)$

最大方向导数为$|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$

令$F(x,y)=(1+x)^2+(1+y)^2$，

因此问题转化为求$F(x,y)$在条件$x^2+y^2+xy=3$下的最大值.

应用拉格朗日乘数法：

令$L(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$，

由$\begin{cases} L'_x = 2(1+x) + \lambda(2x+y) = 0, \\ L'_y = 2(1+y) + \lambda(2y+x) = 0, \\ L'_\lambda = x^2+y^2+xy-3=0, \end{cases}$化简得$\begin{cases} (x+y-1)(x-y)=0, \\ x^2+y^2+xy-3=0, \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=2, \end{cases}$

比较大小：$F(1,1)=8$，$F(-1,-1)=0$，$F(2,-1)=9$，$F(-1,2)=9$，

从而知$F(x,y)$在条件$x^2+y^2+xy=3$下的最大值为$\sqrt{9}=3$，

即$f(x,y)$在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

7、 已知函数$f(x,y)$满足$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x, f'_x(x,0)=(x+1)e^x, f(0,y)=y^2+2y$，求$f(x,y)$的极值.

(2015 数二)

解析：由$f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，对 y 积分得$f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+u(x)$.

因为$f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，所以$e^x+u(x)=(x+1)e^x$，

得$u(x)=(x+1)e^x-e^x=xe^x$，

从而$f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x$.

对 x 积分得$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+v(y)$，

因为$f(0,y)=y^2+2y$，所以$(y+1)^2-1+v(y)=y^2+2y$，得$v(y)=0$，

从而$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x=(x+y^2+2y)e^x$.

则 有 $f'_y(x,y)=(2y+2)e^x, f''_{xx}(x,y)=(x+y^2+2y+2)e^x, f''_{yy}(x,y)=2e^x$.

令$f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$，得驻点$(0,-1)$，

设$A=f''_{xx}(0,-1)=1, B=f''_{xy}(0,-1)=0, C=f''_{yy}(0,-1)=2$，

由于$AC-B^2>0, A>0$，所以$f(x,y)$有极小值$f(0,-1)=-1$.

8、 求函数 $\boldsymbol{f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}$ 的极值

（2012 数一、二）

解析： 先求驻点

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ 可得驻点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$

然后再求驻点处的二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x)-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot+x^2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=(x^2-1)ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x)+xy^2e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-x)=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

在驻点 $(1,0)$ 处， $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-2e^{-\frac{1}{2}}$， $B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0$， $C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-e^{-\frac{1}{2}}$

由于 $AC-B^2=2e^{-1}>0$，且 $A<0$，故 $(1,0)$ 为极大值点， $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值。

在驻点 $(-1,0)$ 处， $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(-1,0)}=2e^{-\frac{1}{2}}$， $B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,0)}=0$， $C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(-1,0)}=e^{-\frac{1}{2}}$

由于 $AC-B^2=2e^{-1}>0$，且 $A>0$，故 $(-1,0)$ 为极小值点， $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值。

9、将长为 2m 的铁丝分为三段，依次为围成圆、正方形与正三角形。三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值。

（2018 数一数二）

解析： 设圆的半径为 x，正方形与正三角形的边长分别为 y 和 z，则问题化为：函数 $f(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在条件 $2\pi x+4y+3z=2(x>0,y>0,z>0)$ 下是否存在最小值。

令 $L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\frac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$，考虑方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} z + 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

解得 $x_0 = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$， $y_0 = \dfrac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$， $z_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$

$f(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$

又当 $2\pi x + 4y + 3z = 2$ 且 $xyz = 0$ 时， $f(x, y, z)$ 的最小值为

$f(0, \dfrac{2}{4 + 3\sqrt{3}}, \dfrac{2\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}}) = \dfrac{1}{4 + 3\sqrt{3}}$

所以三个图形的面积之和存在最小值，最小值为

$f(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$ （单位： m^2 ）

10、求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.（2013 数二）

解析： 设曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1$ 上的点到坐标原点的距离的平方为 $f(x, y)$，即

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

这个问题的实质要求是函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^3 - xy + y^3 = 1$ 下的最大值、最小值问题，应用拉格朗日乘数法，令

$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$，

对 L 求一阶偏导，并令它们都等于 0，有

$$\begin{cases} L_x = 2x + 3\lambda x^2 - \lambda y = 0 & ① \\ L_y = 2y - \lambda x + 3\lambda y^2 = 0 & ② \\ L_\lambda = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 & ③ \end{cases}$$

由①、②得 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3x^2 - y}{3y^2 - x}$，

即 $3xy(y - x) = (x + y)(x - y)$，

得 $y = x$， 或 $3xy = -(x + y)$（舍去）.

将 $y=x$ 代入③得 $x=y=1$，$(1,1)$ 为唯一可能极值点. 此时 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}$.

然后考虑边界点，即 $(1,0)$，$(0,1)$，它们到原点的距离为 1.

因此曲线上的点到坐标原点的最长距离为 $\sqrt{2}$，最短距离为 1.

11、求函数 $f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

（2013 数一）

解析：先求驻点，令

$$\begin{cases} f_x=(x^2+y+\frac{1}{3}x^2)e^{x+y}=0 \\ f_y=(1+y+\frac{1}{3}x^2)e^{x+y}=0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases}$

为了判断这两个驻点是否为极值点，求二阶导数

$$\begin{cases} f_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} \\ f_{xy}=\left(x^2+1+y+\frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} \\ f_{yy}=\left(2+y+\frac{1}{3}x^3\right)e^{x+y} \end{cases}$$

在点 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 处，

$$A=f_{xx}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=-e^{-\frac{5}{3}},$$

$$B=f_{xy}=\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{5}{3}},$$

$$C=f_{yy}\left(-1,-\frac{2}{3}\right)=e^{-\frac{5}{3}},$$

因为$A<0$，$AC-B^2<0$，所以 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$不是极值点.

类似地，在点$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$处，

$$A=f_{xx}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=3e^{-\frac{1}{3}},$$

$$B=f_{xy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}},$$

$$C=f_{yy}\left(1,-\frac{4}{3}\right)=e^{-\frac{1}{3}},$$

因为 $A>0, AC-B^2=2e^{-\frac{2}{3}}>0,$ 所以 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为

$f\left(1,-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}}=-e^{-\frac{1}{3}}$

12、已知微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是 R 上的连续函数.

（I）若$f(x)=x$，求方程的通解；

（II）若$f(x)$是周期为T的函数，证明：方程存在唯一的以T为周期的解.

（2018 数一）

解析：（I）当$f(x)=x$时，方程化为$y'+y=x$，其通解为

$$\begin{aligned}y&=e^{-x}(C+\int xe^x\,dx)\\&=e^{-x}(C+xe^x-e^x)\\&=Ce^{-x}+x-1.\end{aligned}$$

（II）方程$y'+y=f(x)$的通解为

$$y=e^{-\int_0^x dt}\left(C+\int_0^x e^{\int_0^t dt}f(t)dt\right),$$

即$y=e^{-x}\left(C+\int_0^x e^t f(t)dt\right)$，

由$y(x)=e^{-x}\left(C+\int_0^x e^t f(t)dt\right)$，得

$$y(x+T)-y(x)=e^{-x}\left[(\frac{1}{e^T}-1)\,C+\frac{1}{e^T}\int_0^{x+T}e^t f(t)dt-\int_0^x e^t f(t)dt\right].$$

因为$f(x)$是周期为T的连续函数，所以

$$\frac{1}{e^T}\int_0^{x+T}e^t f(t)dt=\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)dt+\frac{1}{e^T}\int_T^{x+T}e^t f(t)dt$$

$=\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)dt+\frac{1}{e^T}\int_0^x e^{u+T} f(u+T)du$

$=\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)dt+\int_0^x e^t f(t)dt.$

从而$y(x+T)-y(x)=e^{-x}\left[(\frac{1}{e^T}-1)C+\frac{1}{e^T}\int_0^T e^t f(t)dt\right].$

所以，当且仅当$C=\frac{1}{e^T-1}\int_0^T e^t f(t)dt$时，$y(x+T)-y(x)=0.$

故方程存在唯一的以T为周期的解.

13、设函数 y(x)满足方程$\ddot{y}+2\dot{y}+ky=0$,其中 0<k<1.

（1）证明：反常积分$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx$收敛；

（2）若 y(0)=1,$y(\dot{0})$=1,求$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx$的值。

（2016 数一）

解析：

1）微分方程$\ddot{y}+2\dot{y}+ky=0$的特征方程为$\gamma^2+2\gamma+k=0$。

解得：$\gamma_1=-1+\sqrt{1-k},\gamma_2=-1-\sqrt{1-k}$。

因为 0<k<1,所以$\gamma_1<0,\gamma_2<0$，从而$\int_0^{+\infty} e^{\gamma_1 x}\,dx$与$\int_0^{+\infty} e^{\gamma_2 x}\,dx$收敛。

由于$\gamma_1\neq\gamma_2$，所以 y(x)=$c_1e^{\gamma_1 x}+c_2e^{\gamma_2 x}$，其中$c_1$与$c_2$是任意常数。

综上可知，反常积分$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx$收敛。

2）由 1）知，$\gamma_1<0,\gamma_2<0$，

所以$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(c_1e^{\gamma_1 x}+c_2e^{\gamma_2 x})=0$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(\dot{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(c_1\gamma_1e^{\gamma_1 x}+c_2\gamma_2e^{\gamma_2 x})=0.$

又y(0)=1,$y(\dot{0})=1$,所以

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{k}\left(y(\ddot{x})+2y(\dot{x})\right)\right]dx$$

$$=-\frac{1}{k}\left(y(x)\dot{+}2y(x)\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{3}{k}$$

14、设函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial \mathrm{f(x,y)}}{\partial \mathrm{x}}=(2x+1)e^{2x-y}$,且$f(0,y)=y+1$,是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算曲线积分$I(t)$=$\int_{l_1}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$，并求$I(t)$的最

小值。

（2016 数一）

解析：因为$\frac{\partial \mathrm{f(x,y)}}{\partial \mathrm{x}}=(2x+1)e^{2x-y}$，所以

$$\mathrm{f}(x,y)=\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx=\int(2x+1)e^{2x-y}\,dx=x\,e^{2x-y}+c(y)。$$

将$f(0,y)=y+1$代入上式，得$C(y)=y+1$.所以$f(x,y)$=x $e^{2x-y}+y+1.$

从而$I(t)$=$\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=f(1,t)-f(0,0)=e^{2-t}+t,\dot{I(t)}=-e^{2-t}+1.$

令$\dot{I(t)}=0$，得$t=2.$

由于当$t<2$时，$\dot{I(t)}$<0,单调减少，

当$t>2$时，$\dot{I(t)}$>0, $I(t)$单调增加，

所以$I(2)=3$是$I(t)$在$(-\infty,+\infty)$上的最小值。

15、已知函数$z=z(x,y)$由方程$(x^2+y^2)z+lnz+2(x+y+1)=0$确定,求$z=z(x,y)$的极值。

（2016 数二）

解: 在$(x^2+y^2)z+lnz+2(x+y+1)=0$两边分别对$x$和$y$求偏导数，得

$$\begin{cases}2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0,\\2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0.\end{cases}\qquad ①$$

令$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得$\begin{cases}x=-\frac{1}{z},\\y=-\frac{1}{z}.\end{cases}$

将$\begin{cases}x=-\frac{1}{z},\\y=-\frac{1}{z}\end{cases}$代入方程$(x^2+y^2)z+lnz+2(x+y+1)=0$，得$lnz-\frac{2}{z}+2=0,$

可知$z=1$, 从而$\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

对①中两式两边分别再对x,y求偏导数，得

$$\begin{cases}2x+4x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\2z+4y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\end{cases}\qquad ②$$

从而 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,-1)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,-1)}=-\frac{2}{3}.$

由于$AC - B^2 > 0, A < 0$,所以$z(-1,-1) = 1$是$z(x,y)$的极大值。