第六模块　多元函数积分学（一）

一.　解答题

1、设Σ为曲面$z=x^2+y^2(z\le 1)$的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdx.$$

(2014 数一)

解析：补面Σ_1：$z=1(x^2+y^2\le 1)$，取上侧，则$\Sigma_1+(-\Sigma)$构成封闭曲面的外侧，由高斯公式得，

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma_1+(-\Sigma)}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdx\\&=\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]dv=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2)+7dv\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3d\rho\int_{\rho^2}^1dz+7\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_{\rho^2}^1dz=\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{2}=4\pi,\end{aligned}$$

而$\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdx=0$，

所以，$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdx=0-4\pi=-4\pi$.

2、设薄片型物体 S 是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$z^2=2x$割下的有限部分，其上任一点的密度为$\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C.

(2017 数一)

(I) 求 C 在xoy平面上的投影曲线的方程;

(II) 求 S 的质量 M.

解析：(I) 把$z=\sqrt{x^2+y^2}$和$z^2=2x$联立，消去z，得$x^2+y^2=2x$，则 C 在xoy平面上的投影曲线的方程为$\begin{cases}x^2+y^2=2x\\z=0\end{cases}$.

(II) $M=\iint_{\Sigma}9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=9\iint_{D_{xy}}\sqrt{2(x^2+y^2)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

$$=18\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2d\rho=48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=64.$$

3、　已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$，计算二重积分$\iint_D(x+1)^2dxdy$.

(2017 数二)

解析：利用极坐标系计算，这里把圆心看成坐标原点，即取 $x=\rho\cos\theta$，

$y=1+\rho\sin\theta$，则 $D:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 1\end{cases}$，

$$\iint_D (x+1)^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho\cos\theta+1)^2\cdot\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^3\cos^2\theta+2\rho^2\cos\theta+\rho)d\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\rho^4\cos^2\theta+\frac{2}{3}\rho^3\cos\theta+\frac{1}{2}\rho^2)|_0^1\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{2})d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(1+\cos 2\theta)+\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{2})d\theta$$

$$=\frac{1}{8}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)|_0^{2\pi}+(\frac{2}{3}\sin\theta+\frac{1}{2}\theta)|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$$

4、 计算曲线积分 $I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向。(2020 数一)

解析：$P=\frac{4x-y}{4x^2+y^2}$，$Q=\frac{x+y}{4x^2+y^2}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-8xy-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$，即曲线积分与路径无径，

当 $(0,0)\notin D$ (积分区域)时，$I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy=\iint_\Sigma(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$，

当 $(0,0)\in D$ (积分区域)时，取 $l:4x^2+y^2=r^2$ (逆时针)，则 $L+(-l)$ 构成复连通区域边界闭曲线的正向，由格林公式，

$$\oint_{L+(-l)}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy=\iint_\Sigma(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0,$$

$$I=\int_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy=\int_l\frac{4x-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{4x^2+y^2}dy$$

$$=\frac{1}{r^2}\int_l(4x-y)dx+(x+y)dy=\frac{1}{r^2}\iint_D 2d\sigma=\frac{1}{r^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot r=\pi\,.$$

5、设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数，计算

$$I=\iint_\Sigma[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy.$$

(2020 数一)

解析：法向量 $2\vec{n}=(z_x,z_y,-1)=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1)$，$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$，

$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$，$\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{2}}$，利用坐标变换，

$dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，$dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，则

$$I=\iint_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]dydz+[yf(xy)+2y+x]dzdx+[zf(xy)+z]dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\{[xf(xy)+2x-y]\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+[yf(xy)+2y+x]\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+[zf(xy)+z]\}dxdy$$

$$=-\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2dr=\frac{14}{3}\pi.$$

6、设平面区域 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$ 与 x 轴围成，计算 $\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$.

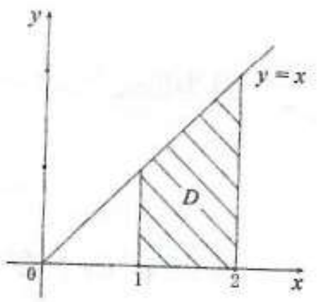
(2020 数二)

解析：如图所示，用极坐标计算，$D:\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\\ \sec\theta\le\rho\le 2\sec\theta\end{cases}$，则

$$\iint_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{\rho}{\rho\cos\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\cdot\frac{1}{2}\rho^2\Big|_{\sec\theta}^{2\sec\theta}d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sec\theta\cdot\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$$



7、已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$,

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$ 其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$. 计算二重积分 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy.$

(2011 数一)

解析：由题设条件知积分区域 D 可表示为: $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$,

于是有

$$I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy = \int_0^1 xdx[\int_0^1 ydf'_x(x,y)]$$

$$= \int_0^1 xdx[(yf'_x(x,y))|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x,y)dy]$$

$$= \int_0^1 xdx[f'_x(x,1) - \int_0^1 f'_x(x,y)dy]$$

$$= \int_0^1 xf'_x(x,1)dx - \int_0^1 xdx \int_0^1 f'_x(x,y)dy$$

$$= \int_0^1 xdf(x,1) - \int_0^1 dy \int_0^1 xf'_x(x,y)dx$$

$$= (xf(x,1))|_0^1 - \int_0^1 f(x,1)dx - \int_0^1 dy \int_0^1 xdf(x,y)$$

$$= -\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx \ (\because f(x,1) = 0)$$

$$= -\int_0^1 dy[(xf(x,y))|_0^1 - \int_0^1 f(x,y)dx]$$

$$= -\int_0^1 [f(1,y) - \int_0^1 f(x,y)dx]dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx \ (\because f(1,y) = 0)$$

$$= \iint\limits_D f(x,y)dxdy = a,$$

故 $I = \iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy = a$.

8、设 Ω 是由锥面 $x^2 + (y-z)^2 = (1-z)^2 (0 \le z \le 1)$ 与平面 $z = 0$ 围成的锥体,求 Ω 的

形心坐标.

(2019 数一)

解析：设形心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由于$\Omega$是关于$yoz$平面对称的,由对称性可知$\bar{x}=0$,由

先二后一法可知:$\iiint\limits_{\Omega} dV=\int_0^1 dz \iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2} dxdy=\pi\int_0^1(1-z)^2dz=\frac{\pi}{3}$,

$\iiint\limits_{\Omega} zdV=\int_0^1 dz \iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2} zdxdy=\frac{\pi}{12}$,　　则$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} zdV}{\iiint\limits_{\Omega} dV}=\frac{1}{4}$.

$\iiint\limits_{\Omega} ydV=\int_0^1 dz \iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2} ydxdy$,

其中$\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2} ydxdy \xrightarrow{u=y-z} \iint\limits_{x^2+u^2\le(1-z)^2}(u+z)dxdu=\iint\limits_{x^2+u^2\le(1-z)^2} zdxdu=\pi z(1-z)^2$,

则$\iiint\limits_{\Omega} ydV=\int_0^1 \pi z(1-z)^2dz=\frac{\pi}{12}$,

故$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} ydV}{\iiint\limits_{\Omega} dV}=\frac{1}{4}$,则形心为$(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

9、设平面区域$D=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算$\iint_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy.$

(2014 数二)

解析：$\iint_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\theta}{cos\theta+sin\theta}d\theta\int_1^2 rsin\pi rdr.$

由于$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\theta}{cos\theta+sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin\theta}{cos\theta+sin\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos\theta+sin\theta}{cos\theta+sin\theta}d\theta=\frac{\pi}{4}.$

$\int_1^2 rsin\pi rdr=\frac{1}{\pi}\left(-rcos\pi r+\frac{1}{\pi}sin\pi r\right)\Big|_1^2=-\frac{3}{\pi}.$

因此$\iint_D \frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy=\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}.$

10、已知曲线 L 的方程为$\begin{cases}z=\sqrt{2-x^2-y^2},\\ z=x,\end{cases}$起点为$A(0,\sqrt{2},0)$，终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，

计算曲线积分$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz.$

(2015 数一)

解析：此问题为计算空间第二型曲线积分，一共有两种方法：

一种为用基本公式，写出曲线 L 的参数方程，化为定积分计算；

一种为利用斯托克斯公式。

法 1：基本公式.

$$L：\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases} \text{的参数方程为} \begin{cases} x=cost, \\ y=\sqrt{2}sint, \\ z=cost, \end{cases}$$

起点 A 对应$t=\frac{\pi}{2}$，终点 B 对应$t=-\frac{\pi}{2}$，因此

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[\left(\sqrt{2}sint+cost\right)\cdot(-sint)+\sqrt{2}sint\cdot\sqrt{2}cost+2sin^2t\cdot cos^2t\right.$$

$$\left.\cdot(-sint)\right]dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}sin^2t-sintcost++2sin^3t\cdot cos^2t\right)dt$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^2tdt-0+0=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

法 2：利用斯托克斯公式.

设L_1是从点 B 到点 A 的直线段，S 为平面$z=x$上由 L 与L_1围成的半圆面下侧.

其法向量为$\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$，方向余弦为$(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}})$，

则由斯托克斯公式$\oint_{L+L_1}(y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & z^2-x^2+y & x^2y^2\end{vmatrix}dS=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\ (2x^2y+1)dS.$$

因为 S 关于 xOz 面对称，$2x^2y$关于 y 是奇函数，所以$\iint_S\ 2x^2ydS=0$，

于是有$\oint_{L+L_1}(y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\ dS=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，

其中半圆 S 的面积为π.

又L_1的参数方程为$x=0,y=y,z=0$，

所以$\int_{L_1}(y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+x^2y^2dz=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}ydy=0$，

得$I=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-0=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

10、计算二重积分$\iint_D\ x(x+y)dxdy$，其中$\mathrm{D}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2,y\ge x^2\}$.

(2015 数二)

解析：因为积分区域 D 关于 y 轴对称，所以 $\iint_D xydxdy=0$，$\iint_D x(x+y)dxdy=$

$\iint_D x^2dxdy=2\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$

$$=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx-2\int_0^1x^4dx=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5},$$

令 $x=\sqrt{2}sint$，

则 $\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4sin^2tcos^2tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-cos4t)dt=\frac{\pi}{8}.$

所以 $\iint_D x(x+y)dxdy=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$

12、计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0<\theta\le\pi)$ 与极轴围成。

（2012 数二）

解析：引入极坐标：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

区域 D 极坐标表示为：$D=\{(r,\theta)|0\le\theta\le\pi,0\le r\le 1+\cos\theta\}$

则二重积分

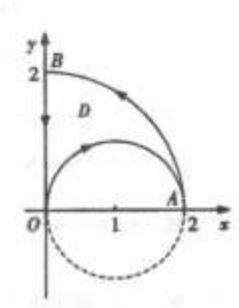
$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D xyd\sigma=\int_0^\pi d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^2\cos\theta\sin\theta\cdot rdr\\
&=\int_0^\pi d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\cos\theta\sin\theta dr\\
&=\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{1+\cos\theta}d\theta\\
&=\int_0^\pi\cos\theta\sin\theta\cdot[\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4]d\theta\\
&=-\frac{1}{4}\int_0^\pi\cos\theta(1+\cos\theta)^4d\cos\theta\\
&\overset{令t=\cos\theta}{=}-\frac{1}{4}\int_1^{-1}t(1+t)^4dt\\
&=\frac{1}{4}\int_{-1}^1t(1+t)^4d(t+1)\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\int_{-1}^1td(t+1)^5\\
&=\frac{1}{20}t(1+t)^5\Big|_{-1}^1-\frac{1}{20}\int_{-1}^1(t+1)^5dt\\
&=\frac{1}{20}\cdot32-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{6}(1+t)^6\Big|_{-1}^1\\
&=\frac{8}{5}-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{6}\cdot64=\frac{16}{15}
\end{aligned}$$

13、已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3xy^2dx+(x^3+x-2y)dy$

（2012 数一）

解析：　利用格林公式

即 $J=\int_L Pdx+Qdy$，曲线 L 如图所示



$P(x,y)=3xy^2$， $Q(x,y)=x^3+x-2y$

且 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+1-3x^2=1$

由于曲线 L 不封闭，添加辅助线 L_1：沿 y 轴由点 $B(0,2)$ 到点 $O(0,0)$

则 $\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_1} Q(0,y)dy=\int_2^0(-2y)dy=\int_0^2 2ydy=4$

在 L_1 与 L 围成的区域 D 上用格林公式（边界取正向），则：

$$\int_{L+L_1} Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=\iint_D 1d\sigma=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2}$$

故 $J=\int_L Pdx+Qdy=\int_{L+L_1} Pdx+Qdy-\int_{L_1} Pdx+Qdy=\frac{\pi}{2}-4$

14、设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$（$0\le t\le 2\pi$）与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint_D(x+2y)dxdy$

（2018 数二）

解析： $\iint_D(x+2y)dxdy=\iint_D(x-\pi)dxdy+\iint_D(2y+\pi)dxdy$

因为 D 是关于直线 $x=\pi$ 对称，所以 $\iint_D(x-\pi)dxdy=0$

设曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$（$0\le t\le \pi$）的直角坐标方程为 $y=y(x)$（$0\le x\le \pi$）,则

$$\iint_D(2y+\pi)dxdy=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(2y+\pi)dy=\int_0^{2\pi}[y^2(x)+\pi y(x)]dx$$

$$\int_0^{2\pi} y^2(x)dx = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \int_0^{2\pi} (1-3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt = 5\pi$$

$$\int_0^{2\pi} y(x)dx = \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} (1-2\cos t + \cos^2 t)dt = 3\pi$$

所以 $\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \pi(5+3\pi)$

15、 设平面内区域D由直线$x=3y$, $y=3x$及$x+y=8$围成.计算$\iint\limits_D x^2dxdy$.

（2013 数二）

解析： $y=3x$与$x+y=8$的交点为$(2,6)$,

$y=\frac{1}{3}x$与$x+y=8$的交点为$(6,2)$,

$$\iint\limits_D x^2dxdy = \int_0^2 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{3x} x^2dy + \int_2^6 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x} x^2dy$$

$$= \int_0^2 \left(3x - \frac{1}{3}x\right)x^2dx + \int_2^6 \left(8 - x - \frac{1}{3}x\right)x^2dx = \frac{416}{3}.$$

16、设直线 L 过$A(1,0,0), B(0,1,1)$两点，将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面Σ,Σ与平面$z=0, z=2$所围成的立体为Ω.

（I）求曲面Σ的方程;

（II）求Ω的形心坐标.

（2013 数一）

解析：（I） $\overline{AB} = \{-1,1,1\}$

$$L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

$\forall M(x,y,z) \in \Sigma$, 对应于 L 上的点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，则$x^2+y^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2$,

由$\begin{cases} x_0 = 1-z \\ y_0 = z \end{cases}$

得$\Sigma: x^2+y^2 = (1-z)^2 + z^2$

即$\Sigma: x^2+y^2 = 2z^2 - 2z + 1.$

（II）显然 $\bar{x}=0, \bar{y}=0, \bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}$，

记 $D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2z^2-2z+1\}$，

$$\iiint\limits_{\Omega} dv=\int_0^2 dz\iint\limits_{D_z} dxdy=\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz=\pi\left(\frac{16}{3}-4+2\right)=\frac{10}{3}\pi，$$

$$\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_0^2 zdz\iint\limits_{D_z} dxdy=\pi\int_0^2(2z^3-2z^2+z)dz=\pi\left(8-\frac{16}{3}+2\right)=\frac{14}{3}\pi，$$

$\therefore \bar{z}=\dfrac{7}{5}$，

$\therefore$ 形心坐标 $\left(0,0,\dfrac{7}{5}\right)$.

17、设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面部分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz+(y^3+2)\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy.$$

（2018 数一）

解析：设 Σ_1 为平面 $x=0$ 被 $\begin{cases}3y^2+3z^2=1,\\ x=0,\end{cases}$ 所围成部分的后侧Ω为 Σ 与 Σ_1 所围成的立体.

根据高斯公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,dy\,dz+(y^3+2)\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^3+3z^3)\,dx\,dy\,dz.$$

设 $y=r\cos\theta$，$z=r\sin\theta$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^3+3z^3)\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}dr\int_0^{\sqrt{1-3r^2}}(1+3r^2)r\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}r(1+3r^2)\sqrt{(1-3r^2)}\,dr$$

设 $\sqrt{(1-3r^2)}=t$，则

$$2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}r(1+3r^2)\sqrt{(1-3r^2)}\,dr=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(2-t^2)t^2\,dt$$

$$=\frac{14\pi}{45}.$$

又

$$\iint_{\Sigma_1} x\,dy\,dz+(y^3+2)\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy=0$$

所以$I=\frac{14\pi}{45}$.

18、 设有界区域C由平$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，φ为C整个表面的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint(x^2+1)\,dydz-2ydzdx+3zdxdy$$

（2016 数一）

解析：由高斯公式得

$$I=\iiint_{\Omega}(2x+dxdydz)$$

因为$I=\iiint_{\Omega}\ dxdydz=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times 1=\frac{1}{3}$

$$\iiint_{\Omega} xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}dy\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}dz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}x\left(1-x-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\int_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{12}$$

所以$I=2\times\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

19、 设 D 是 直 线 $y=1,y=x,y=-x$ 围 成 的 有 界 区 域 ， 计 算 二 重 积 分 $\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$.

（2016 数二）

解析：因为区域D关于y轴对称，所以$\iint_D\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy=0$.

$$\iint_D\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\iint_D\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\csc^2\theta-2)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(-\cot\theta-2\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}=1-\frac{\pi}{2}.$$

20、 已知平面区域$D=\{(x,y)||x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$，计算二重积分$\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$

（2019 数二）

解:易知积分区域关于y轴对称，可知$\iint_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=0$

则原式=$\iint_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，用极坐标计算该积分得原式= $\iint_D\frac{r\sin\theta}{r}r\,drd\theta$，

将$(x^2+y^2)^3\le y^4$化为极坐标$r\le\sin^2\theta$，即$r^6\le r^4\sin^4\theta$，

r的取值范围$0\le r\le\sin^2\theta$。由$|x|\le y$可解得$\frac{1}{4}\pi\le\theta\le\frac{3}{4}\pi$,

则原式= $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}r\sin\theta\,dr=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^5\theta d\theta=\frac{43}{120}\sqrt{2}.$