模块二：一元函数微分学（二）

(21) （1）证明： $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

(2012 数一、二)

证 令 $F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},(-1<x<1)$

又因为$F(x)=F(-x)$，即$F(x)$是偶函数，故只需考虑$x\geq 0$的情形

$$F'(x)=f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{(1+x)(1-x)}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x$$

因为$0<x<1$时， $\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$， $\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^3}>0$， $\sin x>0$

故 $f''(x)>0$

又因为 $f'(x)$在$[0,1)$是连续的，故 $f'(x)$在$[0,1)$是单调增加的，

$f'(x)>f'(0)=2>0$

同理 $f(x)$在$[0,1)$也是单调增加的， $f(x)>f(0)=0$

故$F(x)$在$[0,1)$是单调增加的， $F(x)>F(0)=0$

又因为$F(x)$是偶函数，则$F(x)>0$， $x\in(-1,1),x\neq 0$

又因为$F(0)=0$，故 $F(x)\geq 0$，即原不等式成立，证毕。

(22) 已知常数$k\geq\ln 2-1$，证明$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geq 0$

(2018 数二)

证明 设 $f(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1$. 只需证明：当$0<x<1$时， $f(x)<0$；当$x>1$时，

$f(x)>0$.

$$f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2k}{x}=\frac{1}{x}(x-2\ln x+2k)$$

设 $g(x)=x-2\ln x+2k$，则 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}$

令 $g'(x)=0$，得 $g(x)$ 的唯一驻点 $x=2$.

又 $g''(x)=\dfrac{2}{x^2}>0$，故 $x=2$ 为 $g(x)$ 的唯一极小值点，于是 $g(2)$ 为 $g(x)$ 的最小值.

因为 $k\geq\ln 2-1$，所以 $g(2)=2-2\ln 2+2k\geq 0$，从而 $g(x)>0$（$x\neq 2$）

综上可知 $f'(x)>0$（$x\neq 2$），所以 $f(x)$ 单调递增

又 $f(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$.

一. 选择题

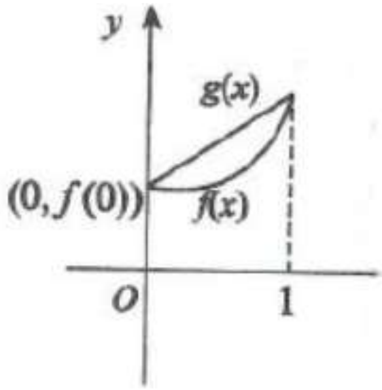
(1) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间[0，1]上 D .

(A) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$ (B) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

(C) 当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$ (D) 当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

(2014 数一)

解析：当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)$ 为凹函数，而 $g(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0)$ 可看成连续 $(0,f(0))$ 与 $(1,f(1))$ 两点的直线段，即如图所示，则 $f(x)\leq g(x)$. 故选 D.



(2) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则

(A) $f(1)>f(-1)$ (B) $f(1)<f(-1)$ (C) $|f(1)|>|f(-1)|$ (D) $|f(1)|<|f(-1)|$

(2017 数一)

解析：由 $f(x)f'(x)>0$，可得 $2f(x)f'(x)>0$，即 $[f^2(x)]'>0$。因此，$f^2(x)$ 严格

单增，故有$|f(x)|$严格单增，所有$|f(1)|>|f(-1)|$，故选C.

(3) 设函数$f(x)$在区间(-1,1)内有定义，且$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则

(A) 当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$时，$f(x)$在$x=0$处可导

(B) 当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$时，$f(x)$在$x=0$处可导

(C) 当$f(x)$在$x=0$处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

(D) 当$f(x)$在$x=0$处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

(2020 数一)

解析：选项(A)和(B)中若$f(0)\neq 0$，则$f(x)$在$x=0$处不连续，也不可导，

选项(D)中，当$f'(0)\neq 0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\infty$，极限不存在，

选项(C)中，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{|x|}}=f'(0)\cdot 0=0$，故选 C.

(4) 已知函数$f(x)=x^2\ln(1-x)$，当$n\geq 3$时，$f^{(n)}(0)=$

(A) $-\dfrac{n!}{n-2}$　　B) $\dfrac{n!}{n-2}$　　(C) $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　　(D) $\dfrac{(n-2)!}{n}$

(2020 数二)

解析：$f^{(n)}(x)=[x^2\ln(1-x)]^{(n)}=[\ln(1-x)x^2]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k[\ln(1-x)]^{(n-k)}(x^2)^{(k)}$

$$=[\ln(1-x)]^{(n)}x^2+n[\ln(1-x)]^{(n-1)}(x^2)'+\frac{n(n-1)}{2}[\ln(1-x)]^{(n-2)}(x^2)''$$

$$=[\ln(1-x)]^{(n)}x^2+n[\ln(1-x)]^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}[\ln(1-x)]^{(n-2)}\cdot 2$$

而$[\ln(1-x)]'=-(1-x)^{-1}$，$[\ln(1-x)]''=-1(1-x)^{-2}$，$[\ln(1-x)]^{(3)}=-2!(1-x)^{-3}$，

$\ldots[\ln(1-x)]^{(n-2)}=-(n-3)!(1-x)^{-(n-2)}$

所以$f^{(n)}(0)=\dfrac{n(n-1)}{2}.(-1)(n-3)!\cdot 2=-\dfrac{n!}{n-2}$，故选 A.

(5) 设函数$f(x)$在区间[-2,2]上可导，且$f'(x)>f(x)>0$，则

(A) $\frac{f(-2)}{f(-1)}>1$ (B) $\frac{f(0)}{f(-1)}>e$ (C) $\frac{f(1)}{f(-1)}<e^2$ (D) $\frac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

(2020 数二)

解析：因为 $f'(x)>f(x)>0$， $x\in[-2,2]$，所以 $\frac{f'(x)}{f(x)}>1\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}-1>0$，

可令 $g(x)=\ln f(x)-x$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-1>0$，所以 $g(x)$ 在 $x\in[-2,2]$ 上严格单调增加，得 $g(-1)=\ln f(-1)+1<g(0)=\ln f(0)\Rightarrow\ln\frac{f(0)}{f(-1)}>1$，所以 $\frac{f(0)}{f(-1)}>e$，B 成立；由 $g(-2)<g(-1)\Rightarrow\ln\frac{f(-2)}{f(-1)}<-1\Rightarrow\frac{f(-2)}{f(-1)}<\frac{1}{e}$，因此 A 不成立，同理 C 和 D 也不成立，故选 B.

(6) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是_________.

(A) $(1,0)$ (B) $(2,0)$

(C) $(3,0)$ (D) $(4,0)$

(2011 数一)

解析：令 $u=(x-1)(x-2)^2,\ v=(x-3)^3(x-4)^4$，则 $y=uv,\ y'=u'v+uv'$，

$y''=u''v+2u'v'+uv'',\ y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$，由于已知函数 $y(x)$ 具有任意阶导数，因此在拐点处必有 $y''(x)=0$，而 $y''(1)\neq0, y''(2)\neq0, y''(3)=0, y''(4)=0$，于是就可以排除(A)、(B)，即点 $(3,0)$ 与 $(4,0)$ 是拐点的可疑点.而 $y'''(3)=36>0$，即 $y''(x)$ 在 $x=3$ 的小邻域内单调增加，由 $y''(3)=0$，知 $y''(x)$ 在 $x=3$ 的左、右两侧符号由负变正，即曲线 $y(x)$ 在点 $(3,0)$ 两侧的凹凸性相反，由定义知点 $(3,0)$ 为拐点;而 $y''(x)$ 在 $x=4$ 两侧符号相同,则 $(4,0)$ 不是拐点.故应选(C)

(7) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$

________.

(A) $-2f'(0)$　　　　(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$　　　　(D) 0

(2011 数二)

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$.因此，应选 B.

(8) 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为________.

(A) 0　　　　(B) 1

(C) 2　　　　(D)3

(2011 数二)

解析：$f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$,

于是得 $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,

令 $f'(x)=\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0$ 得 $3x^2-12x+11=0$,

其判别式 $\Delta=12^2-4\times3\times11=12>0$,所以方程 $3x^2-12x+11=0$ 有两个不同实根，

即函数 $f(x)$ 有 2 个驻点.因此，应选 C.

(9)设函数 $f(x)=\begin{cases}x|x|, x\le 0\\ x\ln x, x>0\end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的________.

(A)可导点,极值点.　　　　(B) 不可导点,极值点.

(C) 可导点,非极值点.　　　　(D) 不可导点,非极值点.

(2019 数一)

解析：$f(x)$ 在 $x=0$ 处的右导数 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$ 不存在,

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的不可导点. $f(0)=0$, 在 $x=0$ 点的左邻域内 $f(x)<0$, 右邻域内 $f(x)<0$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.故应选 B.

(10)曲线$\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$上对应于$t=1$的点处的曲率半径是________.

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

(2014 数二)

解析：由曲率公式$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$，求得$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=\frac{2t+4}{2t}\Big|_{t=1}=3$，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}\Big|_{t=1}=-1$

带入曲率公式得$k=\frac{1}{10\sqrt{10}}$，从而曲率半径$\mathrm{R}=\frac{1}{k}=10\sqrt{10}$.应选 C.

(11)已知函数 f(x)=$\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}, n=1,2,\dots \end{cases}$，则________

(A)x=0 是 f(x)的第一类间断点 (B)x=0 是 f(x)的第二类间断点

(C)f(x)在 x=0 处连续但不可导 (D)f(x)在 x=0 处可导

(2016 数一)

解析：D

因为$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x$=0,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$,可得 f(0-0)=f(0+0)=f(0)，所以 f(x)在 x=0 处连续，又$f(\dot{0})_-=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x-0}{x-0}=1, f(\dot{0})_+=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x-0}$，而$\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$，可得 1<$\frac{1}{nx}<\frac{n+1}{n}$，且当$\mathrm{x}\to0^+$时 n$\to\infty$，所以$\lim\limits_{x\to0^+}1=1,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，由夹逼准则$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{nx}$=1，即$f(\dot{0})_-=f(\dot{0})_+$=1，故 f(x)在 x=0 处可导

(12)设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则 _______.

（A）函数$f(x)$有 2 个极值点，曲线$y=f(x)$有 2 个拐点

（B）函数$f(x)$有 2 个极值点，曲线$y=f(x)$有 3 个拐点

（C）函数$f(x)$有 3 个极值点，曲线$y=f(x)$有 1 个拐点

（D）函数$f(x)$有 3 个极值点，曲线$y=f(x)$有 2 个拐点

(2016 数二)

答案：B

解析：由导数$f'(x)$的图形（见右图）可知$f(x)$的驻点为$x=a,x=c,x=d$.不可导点为$x=b$.在$x=a,x=c$点的左右两侧，导数$f'(x)$的符号相反，则$x=a,x=c$为$y=f(x)$的极值点.而在$x=b,x=d$点的两侧，导数$f'(x)$的符号相同，则$x=b,x=d$不是极值点，因此$f(x)$有 2 个极值点.

在$x=b$点左侧，$f'(x)$递减，则$f''(x)<0$，而在$x=b$的右侧，$f'(x)$递增，从而$f''(x)>0$，故$(b,f(b))$为曲线的拐点.类似地，在$x=e,x=d$点的左、右两侧，$f'(x)$的单调性发生改变，则$f''(x)$的符号发生改变，因此，$(e,f(e))$，$(d,f(d))$为曲线的拐点，所以曲线

$y=f(x)$有 3 个拐点，故应该选 B.

(13)设函数$f_i(x)(i=1,2)$具有二阶连续导数，且$f_i''(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线$y=f_i(x)(i=1,2)$在点(x_0,y_0)处具有公切线$y=g(x)$，且在该点处曲线$y=f_1(x)$的曲率大于曲线$y=f_2(x)$的曲率，则在x_0的某个邻域内，有 _______.

（A）$f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$　　（B）$f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

（C）$f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$　　（D）$f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

(2016 数二)

答案：A

解析：由题设条件知：$f_1(x_0)=f_2(x_0)$，$f_1{}'(x_0)=f_2{}'(x_0)$；

曲线$y=f_1(x)$与$y=f_2(x)$在点(x_0,y_0)处的曲率分别为

$k_1=\frac{|f_1{}''(x_0)|}{[1+(f_1{}'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}$，$k_2=\frac{|f_2{}''(x_0)|}{[1+(f_2{}'(x_0))^2]^{\frac{3}{2}}}$，

因为$f_1{}'(x_0)=f_2{}'(x_0)$，$k_1>k_2$，所以$|f_1{}''(x_0)|>|f_2{}''(x_0)|$，又$f_1{}''(x_0)<0$，$f_2{}''(x_0)<0$，

从而知$f_1{}''(x_0)<f_2{}''(x_0)<0$.显然在$x_0$的某邻域内曲线$y=f_1(x)$与$y=f_2(x)$均为凸的，

故$f_1(x)\le g(x)$，$f_2(x)\le g(x)$；因此排除 C、D.

令$F(x)=f_1(x)-f_2(x)$，则$F(x_0)=0$，$F'(x_0)=0$，$F''(x_0)<0$，根据极值

第二充分判别法知$x=x_0$为$F(x)$的一个极大值点，于是得$F(x)\le F(x_0)=0$，即$f_1(x)\le f_2(x)$.

综上所述，$f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$，故应该选 A.

(14)设函数 $y=f(x)$ 由方程$\cos(xy)+\ln y-x=1$确定，则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=$（　　）.

（A）2　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2

(2013 数二)

解　将$x=0$代入方程得　$\cos 0+\ln f(0)-0=1$，

即$\ln f(0)=0$，$\therefore f(0)=1$.

方程$\cos(xy)+\ln y-x=1$两端同时对x求导得

$-[f(x)+xf'(x)]\bullet\sin[xf(x)]+\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1=0$.

将$x=0$代入上式得 $f'(0)=1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=\lim_{n\to\infty}2\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=\lim_{x\to 0}2\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)=2.$$ 故应选 A.

(15)已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中$c,k$为常数，且$c\ne 0$，则（　　）.

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

(2013 数一)

解　用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{kx^{k-1}(1+x^2)}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{k-1}}=c\ne 0,$$

因此$k-1=2,\ \dfrac{1}{k}=c$，即$k=3,\ c=\dfrac{1}{3}$. 故应选 D.

(16)下列题目中，在$x=0$处不可导的是（　　）.

（A）$f(x)=|x|\sin|x|$.　　（B）$f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

（C） $f(x)=\cos|x|$.　　　　　（D） $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2018 数一)

解　对于 D 选项 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$，

由 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\dfrac{1}{2}$，

$f_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}=\dfrac{1}{2}$，

可得 $f_+'(0)\neq f_-'(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导．故应选 D.

(17) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$______

（A） $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B） $(-1)^{n}(n-1)!$　　（C） $(-1)^{n-1}n!$　　（D） $(-1)^{n}n!$

(2012 数一、二)

解　A

$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x})(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots$
$+(e^x-1)(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(ne^{nx})$

当 $x=0$ 时， $e^x-1=0$ 故

$f'(0)=1\cdot(1-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

故应选 A

(18) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是______

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

(2012 数一)

解　B

A 用枚举法：设 $f(x,y)=|x|+|y|$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

但是 $f_x(0,0)$， $f_y(0,0)$ 都不存在即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微 ，A 错误

B 项：由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=A$ （存在），则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

又 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，故 $f(0,0)=0$

且 $\begin{matrix}x\to 0\\ y\to 0\end{matrix}$ 时， $f(x,y)$ 是 x^2+y^2 的高阶无穷小

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ B 正确

C、D 项用枚举法： $f(x,y)=x$ 满足条件，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 均不存在。

故 C、D 错误，应选 B

(19) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

（A） $f(x)=|x|\sin|x|$. （B） $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

（C） $f(x)=\cos|x|$. （D） $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2018 数二)

解 对于 D 选项 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$，

由 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x}{x}=-\frac{1}{2}$，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}$，

可得 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导. 故应选 D.

(20) 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，则当 $n\geq$

2时，$f^{(n)}(0)$= _______.

(2016 数二)

答案：$5\cdot 2^{n-1}$

解析：由条件：$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，得

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$； $f''(x)=2+2f'(x)$；

$f'''(x)=2f''(x)$； $f^{(4)}(x)=2f'''(x)=2^2f''(x)$；

$f^{(5)}(x)=2^3f''(x)$； $\cdots$ $f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)$；$(n\geq 2)$

又$f(0)=1$，$f'(0)=4$，$f''(0)=10=5\times 2^1$；$f'''(0)=5\times 2^2$；

$f^{(4)}(0)=5\times 2^3$；$f^{(5)}(0)=5\times 2^4$；$\cdots$；$f^{(n)}(0)=5\times 2^{n-1}$.

二. 填空题

(1) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$，则 $f(7)=$__.

(2014 数一)

解析：$f(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C$， $x\in[0,2]$.

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，可知 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$.

又因为 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(7)=f(3)=f(-1)=-f(1)=1$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t+e^t \\ y=\sin t \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=$________________.

(2017 数二)

解析：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-\sin t(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^2}}{1+e^t}=\frac{-\sin t(1+e^t)-\cos t\cdot e^t}{(1+e^t)^3},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{8}$$

(3) 设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$________________.

(2020 数一)

解析：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}}=\frac{1}{t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=1}=-\sqrt{2}$

(4) 设$\begin{cases}x=arctant,\\ y=3t+t^3,\end{cases}$ 则$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$________.

(2015 数二)

解析：$\frac{dy}{dx}=\frac{(3t+t^3)'}{(arctant)'}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$,

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3(1+t^2)^2)'}{(arctant)'}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2$，因此$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=48$

(5) 函数$f(x)=x^2 2^x$在$x=0$处的 n 阶导数$f^{(n)}(0)=$______.

(2015 数二)

解析：由莱布尼兹公式得$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(2^x)^{(n-k)}$

$$=x^2\cdot(2^x)^{(n)}+n\cdot 2x\cdot(2^x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(2^x)^{(n-2)}$$

$$=x^2\cdot 2^x(ln2)^n+2nx\cdot 2^x(ln2)^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^x(ln2)^{n-2}$$

所以$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

(6) 曲线L的极坐标方程是$r=\theta$，则L在点$(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$处的切线的直角坐标方程是______.

(2014 数二)

解析：曲线的参数方程形式为$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta\end{cases}$，$\theta=\frac{\pi}{2}$时对应直角坐标系的点坐标为$(0,\frac{\pi}{2})$.

又$\frac{dy}{dx}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=\frac{sin\theta+\theta cos\theta}{cos\theta+\theta sin\theta}\Big|_{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$，因此切线方程为$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{2}{\pi}(x-0)$，即$\frac{2}{\pi}x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

(7)已知动点P在曲线$y=x^3$上运动，记坐标原点与点P间的距离为l.若点P的横坐标对时间的变化率为常数v_0，则当点P运动到点$(1,1)$时，l对时间的变化率是_______.

(2016 数二)

答案：$2\sqrt{2}v_0$

解析：由题设条件知点P的坐标为(x,x^3)，则$\frac{dx}{dt}=v_0$，且$l=\sqrt{x^2+(x^3)^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，

且l对时间t的变化率为

$\frac{dl}{dt}=\frac{dl}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1+3x^4}{\sqrt{1+x^4}}\cdot v_0(x>0)$，

当$x=1$时，$\frac{dl}{dt}=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot v_0=2\sqrt{2}v_0$，故应填$2\sqrt{2}v_0$.

(8) 曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\y=1-\cos t\end{cases}$在$\mathrm{t}=\frac{3\pi}{2}$对应点处的切线在y轴上的截距为______.

(2019 数二)

解：$2+\frac{3}{2}\pi$

当$\mathrm{t}=\frac{3}{2}\pi$时，$\mathrm{x}=\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi+1$，$\mathrm{y}=1-\cos\frac{3}{2}\pi=1$，

切线斜率$\mathrm{k}=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{3}{2}\pi}=-1$，

$\mathrm{y}-1=-\left(x-\frac{3}{2}\pi-1\right)\Rightarrow y-1=-x+\frac{3}{2}\pi+1\Longrightarrow y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$，

令$\mathrm{x}=0$，得$\mathrm{y}=\frac{3}{2}\pi+2$，即所求截距.

故应填$\frac{3}{2}\pi+2$.

(9)设函数$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}dt$，则$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$在$y=0$处的导数$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$__________.

(2013 数二)

解　$f(x)=0$时$x=-1$，由反函数求导公式，$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$在$y=0$处的导数

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}}=\frac{1}{\left.\sqrt{1-e^{x}}\right|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

(10)设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(f(\frac{1}{n})-1)=$__________________.

(2013 数一)

解　把 $x=0$ 代入方程有 $f(0)=1$，方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 两端同时对 x 求导有

$$f'(x)-1=e^{x[1-f(x)]}[1-f(x)-xf'(x)].$$

把 $x=0$ 代入上式得 $f'(0)=2-f(0)=1.$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1$，

$$\therefore\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=1.$$

(11)设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$__________________.

(2013 数一)

解：　$\because\frac{dx}{dt}=\cos t,\frac{dy}{dt}=t\cos t,$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{t\cos t}{\cos t}=t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t},$$

从而 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$____________

(2012 数二)

解　1

方程两端对 x 求导，得 $2x-\frac{dy}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$　　　　(*)

当 $x=0$ 时，由 $x^2-y+1=e^y$ 得 $y(0)=0$，将 $x=0$， $y(0)=0$ 代入(*)得， $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

在(*)式两端对 x 求导得 $2-\frac{d^2y}{dx^2}=e^y(\frac{dy}{dx})^2+e^y\frac{d^2y}{dx^2}$

将 $x=0$， $y(0)=0$， $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入上式，得 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1$

(13) 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是__________

(2018 数二)

解 $y'=2x+\frac{2}{x}$ ，$y''=2-\frac{2}{x^2}$，由此得拐点坐标 $(1,1)$，曲线在拐点处斜率为 $y'(1)=4$，

切线方程为 $y=4x-3$， 故应填 $y=4x-3$

(14) 曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$， 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________

(2018 数二)

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=-\tan t$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t}$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$， $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8}{3\sqrt{2}}$， 所以 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}$， 故应填 $\frac{2}{3}$

(15) 曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 点处的法线方程为____________________.

(2013 数二)

解: $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\sqrt{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=t,$$

$t=1$ 处 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$.

故 $t=1$ 处对应曲线上点 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\ln 2\right)$.

曲线在 $t=1$ 处法线斜率为 $-\frac{1}{t}=-1$.

故 $t=1$ 处曲线法线方程为

$$y-\frac{1}{2}\ln 2=-(x-\frac{\pi}{4})，$$

即 $x+y=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.