第六模块　多元函数积分学（二）

二、 选择题

1、 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx =$ ____D____.

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

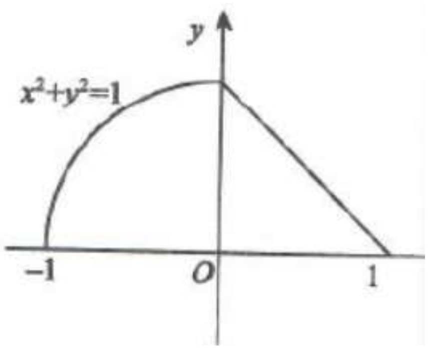
(2014 数一)

解析：积分区域如图所示，换成另一形式的直角坐标应为

$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$，

而换成极坐标应为

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$，故选 D.



2、设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$.如果对上半平面 $(y>0)$ 内的任意有向光滑封闭区域 C 都有 $\oint_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, 那么函数 $P(x,y)$ 可取为________.

(A) $y-\dfrac{x^2}{y^3}$.　(B) $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$.　(C) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$.　(D) $x-\dfrac{1}{y}$.

(2019 数一)

解析： 曲线积分与路径无关,则应有$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,排除 A、B.对于 C 选项，$x=0$不连续，排除.故应选 D.

3、 设D是第一象限中由曲线$2xy=1,4xy=1$与直线$y=x,y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D上连续，则$\iint_D f(x,y)dxdy=$_________.

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2sin2\theta}}^{\frac{1}{sin2\theta}}f(rcos\theta,rsin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{sin2\theta}}}f(rcos\theta,rsin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2sin2\theta}}^{\frac{1}{sin2\theta}}f(rcos\theta,rsin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{sin2\theta}}}f(rcos\theta,rsin\theta)dr$

(2015 数一)

解析：由题意知积分区域 D 如右图所示，

曲线$2xy=1,4xy=1$在极坐标系下的方程为

$2r^2cos\theta sin\theta=1,4r^2cos\theta sin\theta=1$，即$r=\frac{1}{\sqrt{sin2\theta}},r=\frac{1}{\sqrt{2sin2\theta}}$.

直线$y=x,y=\sqrt{3}x$在极坐标系下的方程为$\theta=\frac{\pi}{4},\theta=\frac{\pi}{3}$.

因此积分区域 D 在极坐标系下的表示为

$D=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2sin2\theta}}\le r\le\frac{1}{\sqrt{sin2\theta}}\right\}$

从而$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{sin2\theta}}}f(rcos\theta,rsin\theta)rdr$.应选 B.

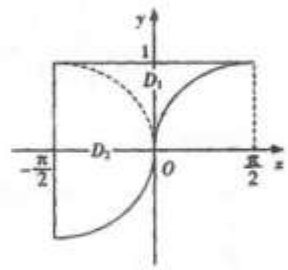
4、 设区域 D 由曲线$y=\sin x$，$x=\pm\frac{\pi}{2}$，$y=1$围成，则$\iint\limits_D(xy^5-1)dxdy=$__________

（A）π（B）2（C）-2（D）$-\pi$

（2012 数二）

解析： D

添加$y=-\sin x$将 D 分割成D_1和D_2两个部分，如图所示



$$\iint_D xy^5dxdy=\iint_{D_1}xy^5dxdy+\iint_{D_2}xy^5dxdy=0+0=0$$

$$\iint_D(xy^5-1)dxdy=\iint_D -1dxdy=-\iint_D\ dxdy=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}dy=-\pi$$，故选 D

5、$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$

（A）$\frac{5}{3}$　（B）$\frac{5}{6}$　（C）$\frac{7}{3}$　（D）$\frac{7}{6}$

（2018 数二）

解析： C

易知积分区域 D 关于 y 轴对称，所以原式=$\iint_D(1-xy)dxdy=\iint_D dxdy$

$\iint_D dxdy=2\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=2\int_0^1(2-x^2-x)dx=\frac{7}{3}$． 故应选 C.

6、设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)dxdy$

$(k=1,2,3,4)$，则（　　）.

（A）$I_1>0$　　　（B）$I_2>0$

（C）$I_3>0$　　　（D）$I_4>0$

（2013 数二）

解析：$I_k=\iint_{D_k}(y-x)dxdy=\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r\sin\theta-r\cos\theta)rdr$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta=\frac{1}{3}(-\cos\theta-\sin\theta)\Big|_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}},$$

导入得　$I_1=0,\quad I_2=\frac{2}{3}>0,\quad I_3=0,\quad I_4=-\frac{2}{3}<0$．故应选 B.

7、 设$l_1: x^2+y^2=1, l_2: x^2+y^2=2, l_3: x^2+2y^2=2, l_4: 2x^2+y^2=2,$ 为四条逆时针的平面曲线，记$I_i=\oint_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则$MAX(I_i)=(\quad)$.

（A）I_1　　（B）I_2　　（C）I_3　　（D）I_4

（2013 数一）

解析： 由格林公式得

$$I_i=\oint_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy=\iint_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy,$$

其中$D_1: x^2+y^2\le 1,\ D_2: x^2+y^2\le 2,\ D_3: \frac{x^2}{2}+y^2\le 1,\ D_4: x^2+\frac{y^2}{2}\le 1.$

显然在D_4内有$1-x^2-\frac{y^2}{2}>0$，在D_4外有$1-x^2-\frac{y^2}{2}<0$，

又如图有$D_1\subset D_4$，$D_4\subset D_2$. 由重积分性质知$I_4>I_1$，$I_4>I_2$.

又$D_4=D_5+D_4\backslash D_5$，$D_3=D_5+D_3\backslash D_5$，在$D_3\backslash D_5$上$1-x^2-\frac{y^2}{2}<0$，在$D_4\backslash D_5$上$1-x^2-\frac{y^2}{2}>0$，

故$I_4=\iint_{D_5}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy+\iint_{D_4\backslash D_5}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy$

$>I_3=\iint_{D_5}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy+\iint_{D_3\backslash D_5}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy$. 故应选 D.

8、已知平面区域$\mathrm{D}=\{(\mathrm{x},\mathrm{y})\,||\,\mathrm{x}\,|+|\,\mathrm{y}\,||\le\frac{\pi}{2}\}$，记$I_1=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy, I_2=\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$，$I_3=\iint_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dx\,dy$，则______.

(A) $I_3<I_2<I_1$.　　(B) $I_2<I_1<I_3$.

(C) $I_1<I_2<I_3$.　　(D) $I_2<I_3<I_1$.

（2019 数二）

解：A

在相同的积分区域 D 下，因为$\sin\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}$，

$1-cos\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{x^2+y^2}$,所以$I_2<I_1$且$I_3<I_1$，

又$\sin\sqrt{x^2+y^2}+\cos\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=1$，

即$1-cos\sqrt{x^2+y^2}<\sin\sqrt{x^2+y^2}$，所以$I_3<I_2$，

故$I_3<I_2<I_1$，故应选 A.

一. 填空题

1、设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L zdx+ydz=$________________.

(2014 数一)

解析：$P=Z,Q=0,R=y$，$\vec{n}=(0,1,1)$，$\cos\alpha=0,\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}$

由斯托克斯公式，

$$\oint_L zdx+ydz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}|$$

$$=\iint_{\Sigma}dydz+dzdx=\iint_{\Sigma}(\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+\frac{\cos\beta}{\cos\gamma})dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy=\pi$$

其中$\Sigma: y+z=0(x^2+y^2\le 1)$取上侧，$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

2、若曲线积分$\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$内与路径无关，

则$a=$________________.

(2017 数一)

解析：$P=\frac{x}{x^2+y^2-1}$，$Q=\frac{-ay}{x^2+y^2-1}$，由曲线积分与路径无关，所以，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow -x\cdot 2y=a\cdot 2yx\Rightarrow a=-1.$$

3、 设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且$df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$，

$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$________________.

(2017 数二)

解析：$P=ye^y$，$Q=x(1+y)e^y$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=(1+y)e^y$，所以曲线积分与路径无关，

$$f(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} ye^y dx+x(1+y)e^y dy$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y x(1+y)e^y dy=x\int_0^y (1+y)d(e^y)$$

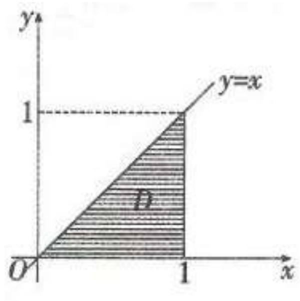
$$=x[(1+y)e^y\big|_0^y-\int_0^y e^y dy]=x[(1+y)e^y-1-e^y\big|_0^y]=xye^y$$

4、 $\int_0^1 dy\int_y^1 \dfrac{\tan x}{x}dx=$________________.

(2017 数二)

解析：如图所示，交换积分次序得，

$$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{\tan x}{x}dy=\int_0^1 \frac{\tan x}{x}\cdot xdx=(-\ln|\cos x|)\big|_0^1=-\ln\cos 1$$

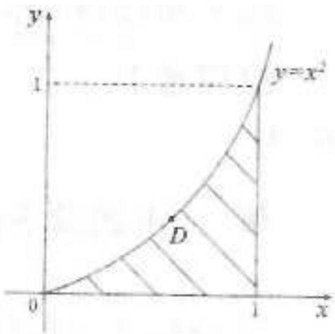


5、$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}dx=$________________.

(2020 数二)

解析：交换积分次序，原式$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1 (x^3+1)^{\frac{1}{2}}x^2dx$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^3+1)^{\frac{1}{2}}d(x^3+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\big|_0^1=\frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1)$$



6、设Σ为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=$____.

(2019 数一)

解析： 将曲面方程代入积分表达式中,原积分$=\iint\limits_{\Sigma}|y|dxdy$, 由于$\Sigma$关于$xoz$平面对称,则

$\iint\limits_{\Sigma}|y|dxdy=2\iint\limits_{\Sigma_1}ydxdy$, 其中$\Sigma_1$为$\Sigma$的右半侧$(y\geq 0)$,原积分$=2\iint\limits_{D_{xy}}ydxdy$,其中

D_{xy}为Σ_1在xoz平面的投影,原积分$=2\iint\limits_{D_{xy}}ydxdy=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin\theta dr=\dfrac{32}{3}$.

7、设平面区域D由直线$y=x$，圆$x^2+y^2=2y$及y轴所围成，则二重积分$\iint\limits_{D}xyd\sigma=$______.

(2011 数二)

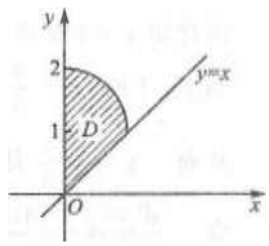
解析： 由题设条件知,积分区域$D=\left\{\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2},0\leq r\leq 2\sin\theta\right\}$,如右图所示,于是知

$$\iint\limits_{D}xyd\sigma==\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin\theta\cos\theta dr$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}r^4|_0^{2\sin\theta}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\sin^6\theta|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{7}{12}.$$



8、设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=x+y$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$__________.

(2011 数一)

解析： 由题设条件知$P=xz,Q=x,R=\frac{y^2}{2}$,根据斯托克斯公式得

$$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz$$
$$=\iint_\Sigma(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$
$$=\iint_\Sigma(y-0)dydz+(x-0)dxdz+(1-0)dxdy$$
$$=\iint_\Sigma ydydz+xdxdz+dxdy,$$

其中Σ是位于柱面$x^2+y^2=1$内的平面$z=x+y$,取上侧,且

$$\iint_\Sigma ydydz=0,\iint_\Sigma xdxdz=0,\iint_\Sigma 1dxdy=\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\le1}1\ dxdy=\pi,$$

其中D_{xy}是Σ在xoy平面上的投影.

9、设Ω是由平面$x+y+z=1$与三个坐标平面所围成的空间区域，则$\iiint_\Omega(x+2y+3z)dxdydz=$______.

(2015 数一)

解析：由轮换对称性知：$\iiint_\Omega xdxdydz=\iiint_\Omega ydxdydz=\iiint_\Omega zdxdydz$

$$\iiint_\Omega(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint_\Omega xdxdydz=6\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz$$
$$=6\int_0^1dx\int_0^{1-x}x(1-x-y)dy=3\int_0^1x(1-x)^2dx=\frac{1}{4}.$$

10、设$\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0\}$，则$\iint_\Sigma y^2dS=$

（2012 数一）

解：$\frac{\sqrt{3}}{12}$

$$\iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{D_{xy}} y^2 \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,dxdy = \sqrt{3}\iint_{D_{xy}} y^2 dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2 dy = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

11、 设 $F(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$，则 rot$F(1,1,0)$= ____________.

（2018 数一）

解 $\text{rot}F=\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & xz \end{pmatrix}=(y,-z,-x)\big|_{(1,1,0)}=(1,0,-1)=\vec{i}-\vec{k}$.

故应填 $=\vec{i}-\vec{k}$

12、设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则

$\oint_L xyds=$ ____________.

（2018 数一）

解 $L=\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 则 $\oint_L xyds=\oint_L \left|\frac{1}{2}-(x^2+y^2)\right|ds=\oint_L(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})ds=-\frac{\pi}{3}$.

故应填 $-\frac{\pi}{3}$.

13、 向量场 A(X,Y,Z)=$(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 rotA=

（2016 数一）

解析：j+(y-1)k

由旋度定义公式，得 rotA=$\begin{matrix} I & J & K \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{k}$

$$=0\cdot\mathrm{i}+1\cdot\ \mathrm{j}+(y-1)\cdot\mathrm{k}=\mathrm{j}+(y-1)\mathrm{k}.$$

14、已知平面区域 D=$\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint x\,dx\,dy.$

（2016 数一）

解析：$\iint x\,dx\,\mathrm{dy}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\,dr$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos\theta)^3-1]\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta^2 + 3\cos\theta^3 + \cos\theta^4)\,d\theta$$

$$= \frac{32}{3} + 5\pi.$$